

Música y matemáticas

Susana
Tiburcio

Durante muchos siglos se ha considerado que las matemáticas y la música tienen cierta similitud y comúnmente se dice que tienen al menos cierta relación. ¿Cómo establecer esta relación? ¿Qué comparten estas actividades? ¿Comparten significados, técnicas, ideas? ¿Qué las relaciona? ¿Es en realidad esta similitud la misma que existe en todas las creaciones humanas? Hay desde luego similitudes innegables como que ambas tienen algo de mágico, son tan abstractas que parecen pertenecer a otro mundo y sin embargo tienen gran poder en este mundo, la música afecta al escucha y las matemáticas tienen múltiples aplicaciones prácticas. Una parte de las matemáticas estudia los números, sus patrones y formas y estos elementos son inherentes a la ciencia, la composición y la ejecución de la música.

La música cambia su textura y carácter según el lugar y la época. Puede ser cristalina o densa, sentimental o explosiva. Por su parte, las matemáticas son directas, nunca alteran su carácter. La música se crea a partir de algo físico, instrumentos de todo tipo de materiales la producen. Las matemáticas son, sobre todo, abstracciones que no necesitan ni siquiera papel y lápiz. El mundo actual no podría concebirse sin ellas, ¿cómo haber llegado a la tecnología y a todos los inventos modernos sin las matemáticas?

La música está cargada de emociones, es alegre o triste, suave o agresiva, puede ser espiritual, estética, religiosa pero no podemos hablar de un teorema "triste" o de una demostración "agresiva".

Tanto el matemático como el músico se encuentran ocupados resolviendo problemas o componiendo o interpretando, enseñando a alumnos sin detenerse a pensar que ambos están entregados a disciplinas que son paradigmas de lo abstracto.

Por la mezcla entre lo terrenal y lo celestial, lo esotérico y lo práctico, lo universal y lo particular, ambas disciplinas han tenido un poder místico desde la Antigüedad. Hasta la fecha el aspecto mágico y ritualista se mantiene porque hay que tener cierto grado de iniciación para introducirse en la lectura de una partitura así como para poder seguir la demostración de un teorema. Pero en ellas hay algo de genial; en la notación que es capaz de indicarnos tiempos, ritmos y altura de sonidos en el caso de la música, o una numeración tan sofisticada como la arábiga y notaciones tan desarrolladas que dan estructura y sentido a los conceptos.

Las matemáticas nacen de la necesidad práctica de registrar el paso del tiempo y las observaciones del cielo y consistieron, en un principio, solamente en números y conteos. Existía la necesidad de llevar un registro de las cosechas, del ganado y de las operaciones comerciales. Así se desarrollaron signos y palabras para los números.

Aunque las primeras expresiones del arte están veladas por la bruma de la prehistoria, existen silbatos de hueso, flautas de caña y palillos de tambor hallados en cuevas y tumbas que atestiguan el poder del sonido para evocar estados de ánimo y reflejan las huellas del hombre en ritos misteriosos. La música nace de la necesidad de protegerse de ciertos fenómenos naturales, de alejar los espíritus malignos, de atraer la ayuda de los dioses, de honrarlos y festejar sus fiestas y de celebrar el cambio de las estaciones.

LOS PITAGÓRICOS

Se dice que Pitágoras acuñó la palabra matemáticas, que significa "lo que es aprendido". Él describe un sistema de ideas que busca unificar los fenómenos del mundo físico y del mundo espiritual en términos de números, en particular, en términos de razones y proporciones de enteros. Se creía que, por ejemplo, las órbitas de los cuerpos celestiales que giraban alrededor de la Tierra producían sonidos que armonizaban entre sí dando lugar a un sonido bello al que nombraban "la música de las esferas".

Pitágoras estudió la naturaleza de los sonidos musicales. La música griega existía mucho antes, era esencialmente melódica más que armónica y era microtonal, es decir, su escala contenía muchos más sonidos que la escala de doce sonidos del mundo occidental. Esto no es algo inusual en las tradiciones musicales orientales donde la música es entera-



mente melódica. Los intervalos más pequeños no se pueden escribir en nuestra notación actual aunque algunos cantantes modernos e instrumentalistas de jazz los ejecuten.

Fue Pitágoras quien descubrió que existía una relación numérica entre tonos que sonaban "armónicos" y fue el primero en darse cuenta de que la música, siendo uno de los medios esenciales de comunicación y placer, podía ser medida por medio de razones de enteros. Sabemos que el sonido producido al tocar una cuerda depende de la longitud, grosor y tensión de la misma. Entendemos que cualquiera de estas variables afecta la frecuencia de vibración de la cuerda. Lo que Pitágoras descubrió es que al dividir la cuerda en ciertas proporciones era capaz de producir sonidos placenteros al oído. Eso era una maravillosa confirmación de su teoría. Números y belleza eran uno. El mundo físico y el emocional podían ser descritos con números sencillos y existía una relación armónica entre todos los fenómenos perceptibles.

Pitágoras encontró que al dividir una cuerda a la mitad producía un sonido que era una octava más agudo que el original (Do al Do superior); que cuando la razón era 2:3 se producía una quinta (la distancia de Do a Sol) y que otras razones sencillas producían sonidos agradables.

La razón por la cual encontramos a estos intervalos más agradables que otros tiene que ver con la física de la cuerda tocada. Cuando una cuerda de 36 cm se rasga, no sólo se produce una onda de 36 cm, sino que además se forman dos ondas de 18 cm, tres de 12, cuatro de 9, y así sucesivamente. La cuerda vibra en mitades, tercios, cuartos, etcétera. Y cada vibración subsidiaria produce "armónicos", estas longitudes de onda producen una secuencia de armónicos, $1/2$, $1/3$, $1/4$... de la longitud de la cuerda. Los sonidos son más agudos y mucho más suaves que el sonido de la cuerda completa (llamada "la fundamental") y generalmente la gente no los escucha pero son los que hacen que los instrumentos musicales suenen diferentes entre sí. Ya que Do y Sol, a una distancia de quinta, comparten muchos de los mismos armónicos, estos sonidos se mezclan produciendo un resultado agradable.

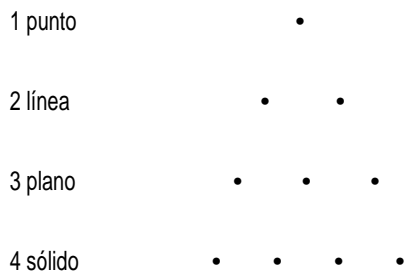
Sin embargo, Pitágoras no sabía nada de armónicos. Él sólo sabía que la longitud de la cuerda con las razones 1:2 y 2:3 producía unas combinaciones de sonidos agradables y construyó una escala a partir de estas proporciones. En sus experimentos, Pitágoras descubrió tres intervalos que consideraba consonantes: el diapasón, el diapente y el diatesa-



ron. Los llamamos la octava, la quinta y la cuarta porque corresponden al octavo, cuarto y quinto sonidos de la que conocemos como escala pitagórica diatónica. La llamamos quinta porque corresponde a la quinta nota de la escala.

Los pitagóricos no sabían de ondas sonoras ni de frecuencias ni de cómo la anatomía del oído afecta la altura de un sonido. De hecho, la regla que establece que la frecuencia está relacionada con la longitud de la cuerda no fue formulada sino hasta el siglo XVII, cuando el franciscano fray Marin Mersenne definió algunas reglas sobre la frecuencia de una cuerda vibrando.

Una de las enseñanzas clave de la escuela pitagórica era que los números lo eran todo y nada se podía concebir o crear sin éstos. Había un número especialmente venerado, el 10, al igual que la *tetractys*, siendo la suma de 1, 2, 3, y 4. La *tetractys* era el símbolo sagrado de los pitagóricos, un triángulo de cuatro hileras representando las dimensiones de la experiencia.



En el caso de la música simbolizaba las proporciones entre las notas empezando por la proporción 1:2 para la octava. La armonía de las esferas proviene de esta numerología musical que llegó también a influir en el modelo planetario de Kepler (1571-1630) unos 2,000 años más tarde. Los experimentos de Pitágoras con el monocordio llevaron a un método de afinación con intervalos en razón de enteros conocido como la afinación pitagórica. La escala producida por esta afinación se llamó escala pitagórica diatónica y fue usada durante muchos años en el mundo occidental. Se deriva del monocordio y de acuerdo con la doctrina pitagórica, todos sus intervalos pueden ser expresados como razones de enteros. Existen diferencias de afinación entre esta escala y la escala temperada usada actualmente.

En la época de los antiguos griegos, los pitagóricos desarrollaron una división del *curriculum* llamado *quadrivium* en

donde la música se consideraba una disciplina matemática que manejaba relaciones de números, razones y proporciones. Esta división se mantuvo durante la Edad Media, por lo que era necesario el estudio de ambas disciplinas. El *quadrivium* (aritmética, música, geometría y astronomía), con el agregado del trivium (gramática, retórica y dialéctica), se convirtieron en las siete artes liberales, pero la posición de la música como un subconjunto de las matemáticas permaneció durante la Edad Media.

La relación entre matemáticas y música, durante el periodo clásico, puede observarse en las obras de Euclides, Arquitas y Nicómaco.

La tradición pitagórica fue propiciada por Severino Boecio (480?-524), filósofo y matemático, principal traductor de la teoría de la música en la Edad Media. Él creía que la música y las proporciones que representaban los intervalos musicales estaban relacionadas con la moralidad y la naturaleza humana y prefería las proporciones pitagóricas.

LA MÚSICA DE LAS ESFERAS

Reconociendo que los planetas giraban alrededor del Sol, Kepler refinó la teoría pitagórica de la "música de las esferas", sugiriendo que los planetas producían diferentes sonidos por los diferentes grados de velocidad a la que giraban. Creía que si se conocía la masa y la velocidad de un objeto que giraba se podría calcular su sonido fundamental. Desarrolló sonidos que asoció a los planetas entonces conocidos.

EL TEMPERAMENTO

La escala temperada se desarrolló para resolver problemas de afinación y llevó a una música en la que se podía modular (cambiar) de una tonalidad a otra sin tener que cambiar la afinación de los instrumentos. El temperamento es la forma musical de mantener series dentro de un espacio definido. La transición de la afinación pitagórica a la temperada tomó siglos, y ocurrió de manera paralela al cambio en la relación entre música y matemáticas.

En el siglo XII, compositores y ejecutantes empezaron a separarse de la tradición pitagórica creando nuevos estilos y tipos de música. Se creó una nueva división de las ciencias, llamada escolástica divina, que no incluía específicamente a la música. El canto monódico gregoriano poco a poco fue

evolucionando en música polifónica con diferentes instrumentos y voces. La ejecución de composiciones más complejas llevaba a experimentar con afinaciones alternativas y temperamentos. Los experimentos de afinación resultaron en una variación de la afinación pitagórica llamada afinación justa.

Las nuevas afinaciones seguían utilizando las matemáticas para calcular los intervalos, pero no necesariamente seguían los principios pitagóricos. Ahora eran utilizadas de una forma práctica y no como un fin. Este cambio de actitud causó desacuerdo entre los matemáticos, quienes querían una adherencia estricta a sus fórmulas, y los músicos, que buscaban reglas fáciles de aplicar. De hecho los músicos empezaron a basarse más en su oído y menos en el monocordio.

El temperamento no se popularizó sino hasta 1630, cuando el padre Mersenne formuló las invaluable reglas para afinar, usadas todavía hoy.

En el siglo XVIII, músicos como Juan Sebastián Bach (1685-1750), empezaron a afinar sus instrumentos usando el temperamento, es decir una escala en la que los doce sonidos fueran afinados sin diferencia entre un Fa sostenido y un Sol bemol. La complejidad de rango y modulaciones lo necesitaban.

Bach compuso *El clavecín bien temperado*, que consiste en 24 piezas en las doce tonalidades, usando el modo mayor y menor de cada una de ellas, demostrando de esta manera las posibilidades de modulación creadas por una afinación igual.

Aunque la música ya no es una disciplina estrictamente matemática, las matemáticas son inherentes a la música y continuarán influyendo en la evolución de la teoría musical.

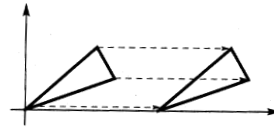
LA MELODÍA

Un procedimiento básico para obtener cohesión en una pieza de música es la reafirmación de una secuencia de sonidos una y otra vez, en forma variada, para evitar la monotonía y dar carácter a la composición. Algunas de las técnicas usadas para dar unidad a una composición, sin hacerla aburrida, están basadas en el plano geométrico.

Las transformaciones musicales están íntimamente relacionadas con las transformaciones geométricas básicas. Una transformación geométrica recoloca una figura geométrica rígida en el plano, preservando su forma y tamaño. La forma original no se distorsiona con la manipulación. Así, una frase musical tendrá motivos que se repiten en forma idéntica o se repiten en forma más aguda o más grave; en otras ocasio-



nes, en vez de subir bajan o retroceden. Rotación, traslación y reflexión, estas transformaciones geométricas las encontramos en la mayoría de las melodías populares y un análisis de las obras maestras musicales nos llevará a encontrarlas. Éste es un recurso muy utilizado aunque normalmente no lo asociamos con las matemáticas.



La forma más sencilla de aplicar la traslación a la música es la repetición.

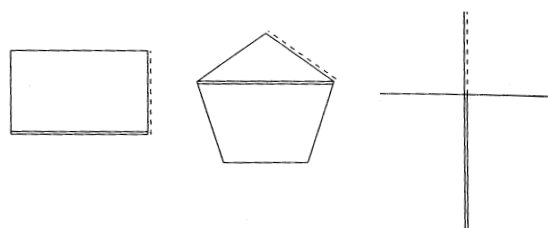
FIBONACCI

Los números de la llamada serie de Fibonacci, son elementos de una serie infinita. El primer número de esta serie es 1, y cada número subsecuente es la suma de los dos anteriores. Como el primero es 1 y antes no hay nada, el segundo es 1, el tercero es 1+1, el cuarto es 1+2, y así sucesivamente:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34.....

La razón entre dos elementos subyacentes de la serie lleva a converger al decimal 0.618..., y sus recíprocos al decimal 1.618... La proporción de estas razones, sea en fracción o en decimal, es considerada por muchos como atractiva a la vista, balanceada y bella, y es nombrada proporción (sección) áurea.

Esta proporción se encuentra en las siguientes figuras geométricas:



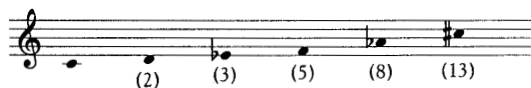


Por su atractiva estética la proporción áurea se usa ampliamente en el arte y en la arquitectura. Muchas elementos de la naturaleza se desarrollan en esta proporción, las vueltas del caracol, los cuernos del cimarrón, la forma en que nacen las ramas y hojas de ciertas plantas, etcétera.

Las superficies se dividen para obtener la proporción áurea, dando lugar a una composición bella y balanceada. Los números de la serie se utilizan porque es una manera fácil de lograr la proporción áurea. Pero no sólo es agradable a la vista sino al oído.

No se sabe si el uso de la serie es intencional o, de manera intuitiva, tal vez el compositor la usa sin saber, sólo porque se oye bien. Por ejemplo, Beethoven no sólo la emplea en el tema de su *Quinta Sinfonía*, sino además en la forma en que incluye este tema en el transcurso de la obra, separado por un número de compases que pertenece a la serie.

Béla Bartók usó esta técnica para desarrollar una escala que denominó la escala Fibonacci:



PROCESOS FORMALES EN MÚSICA

Otro aspecto interesante de la relación entre música y matemáticas es la composición de obras musicales a partir de reglas y conceptos tales como la probabilidad aplicada a juegos de azar, modelos estadísticos, el movimiento browniano o el ruido blanco o música estocástica, entre otros. También se puede generar música por medio de computadoras programadas con ciertas reglas.

Uno de los primeros intentos data de alrededor del año 1026, cuando Guido de Arezzo desarrolló una técnica para componer una melodía asociando sonidos a las vocales de un texto de tal forma que la melodía variaba de acuerdo con el contenido de vocales del texto. Abundan también los procedimientos compositivos basados en proporciones. Un exponente de este método fue Guillaume Dufay (1400-1474), quien derivó el *tempo* de sus motetes de una catedral florentina utilizando la antes mencionada sección áurea (1:1.618). Dufay fue de los primeros en utilizar las traslaciones geométricas de manera deliberada. El uso de secuencias rítmicas como una técnica formal se utilizó entre los años 1300-1450 y el músico G. Machaut lo utilizó en algunos motetes.

JUEGO DE DADOS DE MOZART

Mozart, en 1777, a los 21 años, describió un juego de dados que consiste en la composición de una pequeña obra musical; un vals de 16 compases que tituló *Juego de dados musical para escribir vales con la ayuda de dos dados sin ser músico ni saber nada de composición* (K 294).

Cada uno de los compases se escoge lanzando dos dados y anotando la suma del resultado. Tenemos 11 resultados posibles, del 2 al 12. Mozart diseñó dos tablas, una para la primera parte del vals y otra para la segunda. Cada parte consta de ocho compases. Los números romanos sobre las columnas corresponden a los ocho compases de cada parte del vals, los números del 2 al 12 en las hileras corresponden a la suma de los resultados, los números en la matriz corresponden a cada uno de los 176 compases que Mozart compuso. Hay 2×11^{14} (750 trillones) de variaciones de este vals.

Zahlentafel

1. Walzerteil

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
2	93	22	141	41	105	122	11	30
3	32	6	128	63	146	46	134	81
4	69	95	158	13	153	55	110	24
5	40	17	112	85	161	2	159	100
6	148	74	163	45	80	97	36	107
7	104	157	27	167	154	68	118	91
8	152	60	171	53	99	133	21	127
9	119	84	114	50	140	86	169	94
10	98	142	42	156	75	129	62	123
11	3	87	165	61	135	47	147	33
12	54	130	10	103	28	37	106	5

2. Walzerteil

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
2	70	121	26	9	112	49	109	14
3	117	39	126	56	174	18	116	83
4	66	139	15	132	73	58	145	79
5	90	176	7	34	67	160	52	170
6	25	143	64	125	76	136	1	93
7	138	71	150	29	101	162	23	151
8	16	155	57	175	43	168	89	172
9	120	88	48	166	51	115	72	111
10	65	77	19	82	137	38	149	8
11	102	4	31	164	144	59	173	78
12	35	20	108	92	12	124	44	131

En el siglo xx, con la aparición de la computadora, se comienza a producir música a partir de modelos. Un ejemplo de ello es la música de Iannis Xenakis, uno de los pocos compositores de nuestra época no interesado en el serialismo, movimiento en boga desde principios del siglo xx. Xenakis prefirió la formalización, es decir, el uso de un modelo como base de una composición. Utilizó modelos matemáticos en sus composiciones así como en algunas de sus obras arquitectónicas. Prefirió sobre todo las leyes de la probabilidad:

1. Distribución aleatoria de puntos en un plano (*Diamorphoses*)
2. Ley de Maxwell-Boltzmann (*Pithoprakta*)
3. Restricciones mínimas (*Achorripsis*)
4. Cadenas de Markov (*Analogicas*)
5. Distribución de Gauss (*ST/IO, Atrés*)

También utilizó teoría de juegos (*duelo, estrategia*), teoría de grupos (*Nomos alpha*) y teoría de conjuntos y álgebra booleana (*Henna, Eona*). (Entre paréntesis está indicado el nombre de las obras en las que se aplica el modelo.)

El serialismo contra el cual reaccionó Xenakis fue un movimiento musical que desdeñaba el uso de cualquier escala disponible hasta entonces y las jerarquías propias de la misma, y a su vez proponía el uso de una serie de sonidos que normalmente utilizaba los doce sonidos que se encuentran en una octava sin que se pudiera repetir una sola nota hasta no haber aparecido los doce sonidos. Esta música llegó a ser extremadamente compleja.

Xenakis propuso el uso de una media estadística de momentos aislados y de transformaciones sonoras en un momento dado. El efecto macroscópico podría ser controlado por la media de los movimientos de los elementos seleccionados. El resultado es la introducción de la noción de probabilidad que implica, en este caso particular, el cálculo combinatorio. Escapa de esta manera a la categoría lineal en el pensamiento musical.

Esto lleva al desarrollo de su música estocástica. La música estocástica se caracteriza por masas de sonido, "nubes" o "galaxias", donde el número de elementos es tan grande que la conducta de un elemento individual no puede ser determinada, pero sí la del todo. La palabra estocástica proviene del griego "tendencia hacia una meta". Esto significa que la música es indeterminada en sus detalles, sin embargo tiende a una meta definida.



Probablemente la composición más famosa de Xenakis sea su primera pieza estocástica, *Metástasis*, de 1954, para orquesta de 61 músicos. Esta pieza está basada en el desplazamiento continuo de una línea recta. Tal modelo se representa en la música como un *glissando* continuo. La contracción y expansión del registro y la densidad a través del movimiento continuo son ilustraciones de las leyes estocásticas. Esta obra sirvió como modelo para la construcción del pabellón Philips que, junto con Le Corbusier, Xenakis construyó para la Exposición Internacional de Bruselas, de 1958. En tal estructura no hay superficies planas.

La rigurosidad matemática de la obra de Xenakis podría hacer pensar en resultados excesivamente intelectuales, pero la expresiva contundencia de sus composiciones genera un impacto emocional ligado a una extrema claridad armónica y estructural.

Escuchar la obra de Xenakis con una postura abierta y libre de prejuicios nos permite disfrutar de una experiencia que ejemplifica lo que puede ser la comunión de la música y las matemáticas.

BIBLIOGRAFÍA

Mankiewicz, R., *Historia de las matemáticas*, Paidós, 2000.

Rothstein, E., *Emblems of Mind. The inner life of music and mathematics*, Avon Books, New York, 1996.

Reinthal, J., *Mathematics and Music. Some intersections*, Mu Alpha Theta, 1990.

Hammel Garland, T. y Vaughn Kahn, Ch., *Math and Music. Harmonious Connections*, Dale Seymour Publications, 1995.

Xenakis, I., *Formalized Music. Thought and Mathematics in Music*, Pendragon Revised Edition, 1992.

Susana Tiburcio es especialista en pedagogía de la música.

