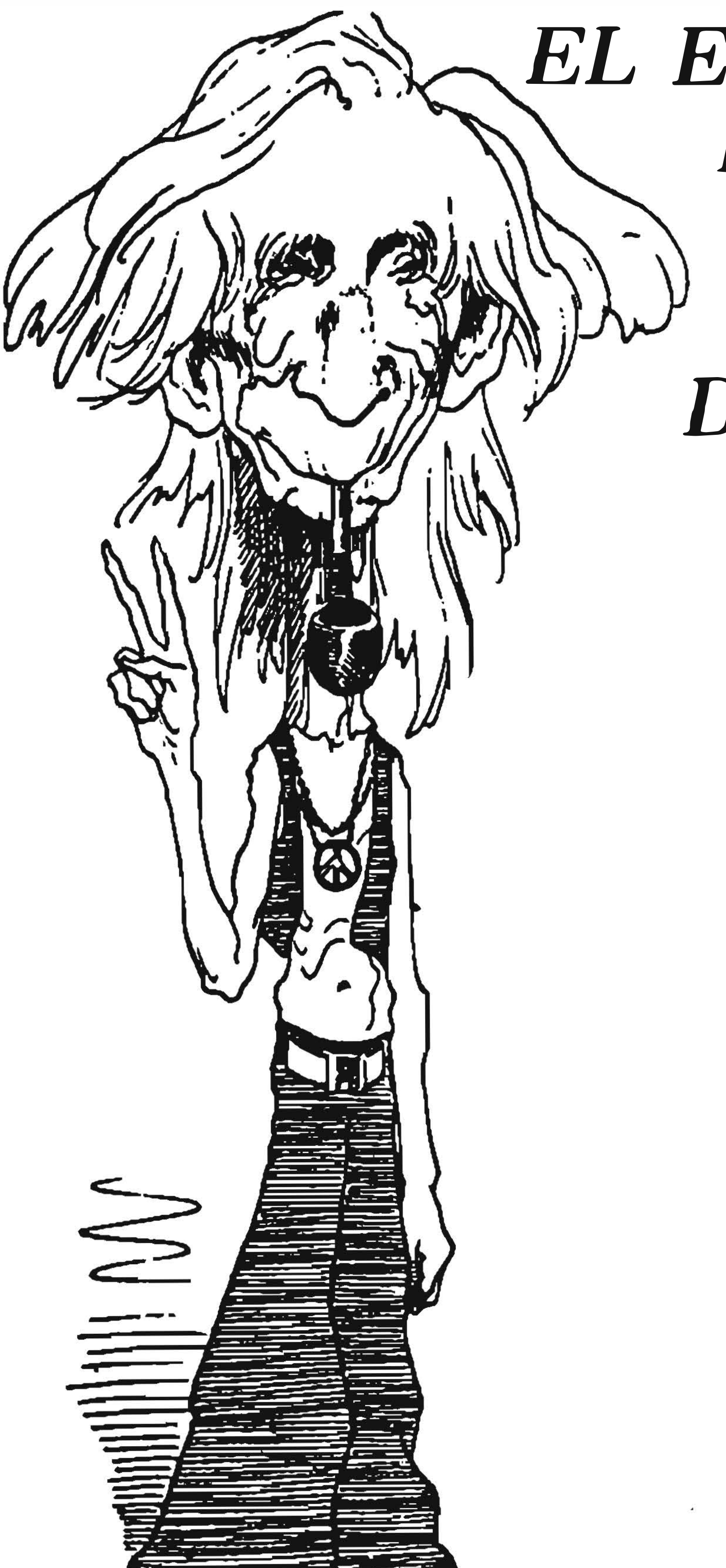


Bertrand Russell

EL ESTATUS DE LAS CLASES EN EL LOGICISMO DE RUSSELL

*Ricardo Gómez**

Durante el último tercio del siglo XIX el desarrollo de la matemática fue conmovido por una serie de notables eventos: Cantor en su *Mengelehre* edificó la matemática sobre conceptos y principios conjuntísticos desde los cuales introdujo rigurosamente las nociones de orden, límite, infinitud y continuidad, dando origen además a nuevos capítulos de la matemática, como la aritmética transfinita. Dedekind y Hilbert llevaron a cabo la aritmetización de la matemática: todo concepto del análisis, geometría y álgebra era introducido desde nociones aritméticas. Frege, a su vez, definió el concepto de número a partir exclusivamente de términos lógicos y dedujo las leyes de la aritmética desde principios lógicos. Peano, en la última década del siglo, logró la axiomatización de la aritmética utilizando exclusivamente símbolos lógico-matemáticos. Pero en 1893 Burali-Forti había descubierto que la aritmética ordinal cantoriana era inconsistente y Russell en 1901 llegó a la misma conclusión con respecto a la aritmética cardinal y a la sistematización de Frege de la aritmética.

La teoría de las clases constituye el núcleo central del intento russelliano de resolver tales dificultades. Como el concepto de número es un caso particular de clases, se concluye, en tanto se acepta la aritmetización de la matemática, que la pregunta por el estatus ontológico de los entes matemáticos es reducible a la cuestión acerca del estatus de las clases.

* Indiana University, mayo de 1979. Agradezco al Dr. Alberto Coffa sus sugerencias y observaciones críticas.

Elementos No. 3, año I, Volumen I. Impreso en México.

Por otra parte, acerca de la teoría de las clases de Russell y del logicismo en general se ha difundido una versión superficial e incorrecta. Así, por ejemplo, respecto al logicismo se ha afirmado muchas veces que él involucra el carácter analítico de los enunciados de la matemática cuando, por el contrario, según Frege, la geometría está constituida por proposiciones sintéticas *a priori*, y, para Russell, hasta 1912 todos los enunciados de la matemática son no-analíticos. A su vez, con referencia a las clases se ha tendido erróneamente a identificar a la teoría russelliana de las mismas con una concepción extensionalista de corte quineano.

Es por ello que creemos relevante adoptar como objetivos principales de nuestra propuesta los siguientes: 1) analizar las modificaciones más importantes de la teoría de las clases de Russell durante su periodo más creativo al respecto (1903-1910), centrando nuestra atención en los problemas relativos a su estatus ontológico; 2) relacionar tal desarrollo con la concepción russelliana del lenguaje, la lógica y la filosofía de la matemática; 3) indicar aquellos supuestos y propuestas que no se alteraron a lo largo de tal periodo. Para ello, hemos de considerar en su secuencia histórica aquellos trabajos en los que Russell se ocupa de las clases. La reciente publicación de artículos y correspondencia pertinentes nos provee de nuevos datos sobre el tema. Hemos de subdividir nuestro estudio en tres periodos mayores, que van desde *The principles of mathematics*[1] (1903), pasando por la crítica y abandono de la teoría de las clases que había sustentado en tal obra, hasta arribar a la sistematización de su nueva teoría de las clases en *Principia mathematica* (1910). En cada periodo hemos de sintetizar la correspondiente concepción de las clases tratando de enfatizar las principales facetas que sean relevantes para los objetivos 1)-3). Finalmente procuraremos inferir una serie de conclusiones que creemos tornarán claro que Russell arribó a una original concepción de las clases que es completamente diferente de la sostenida por la tradición matemática posterior y de la que sus críticos le adscribieron.

1903: The principles of mathematics

En esta obra encontramos tres aspectos principales relativos a las clases: 1. El Desarrollo del Cálculo de clases. 2. La discusión acerca del status de las clases. 3. El intento de solución de la paradoja de 1901.

1. El Cálculo de Clases que Russell propuso en II-B tenía: a) tres nociones primitivas: "tal que", "función proposicional" y "ser elemento de" b) dos proposiciones primitivas: b1. Si x pertenece a la clase de términos que satisfacen a una función proposicional ϕx, entonces x es verdadera de ϕ.

b2. $\phi x \equiv_x \varphi x \supset \hat{x}(\phi x) = \hat{x}(\varphi x)$

Las proposiciones primitivas exhiben una concepción cantoriana de las clases: Toda clase es una colección de objetos distintos que consisten de la totalidad de términos que satisfacen a una función proposicional y dos clases son concebidas como distintas si y sólo si están constituidas por elementos distintos (si hay al menos un elemento de una de ellas que no es elemento de la otra).[2] Tal concepción es coherente con su creencia de que en matemática debemos operar con el conjunto actual de términos y no con los conceptos que eventualmente denoten a tal conjunto.[3] Por lo tanto cabe preguntarse por la naturaleza de tal conjunto.

2. Para responder a tal cuestión debemos tener en cuenta a la siguiente terna de distinciones:

a) Clase-extensión y clase-intensión

Es posible, en general, definir una clase por la enumeración de sus términos (extensionalmente) o por la enunciación de la propiedad que todos los elementos de la clase tienen en común (definición intensional). Sin embargo, determinadas clases no pueden ser definidas extensionalmente: así, la clase nula y las clases infinitas requieren ser definidas intensionalmente. Pero ¿qué es una clase? Russell comienza contestando por la vía negativa: no es una colección, ni una mera totalidad, ni el resultado de una adición numérica de términos ni una función proposicional. El intento de proveer notas positivas caracterizadoras de la noción de la clase lo conduce a un intrincado y no resuelto problema conceptual.

b) Clase como una — clase como múltiple

Creemos que ésta es una distinción vinculada con una dificultad ontológica básica que le preocupó hasta 1905. Cantor había definido la noción intuitiva de clase como una colección de objetos distintos de nuestra intuición o de nuestro pensamiento, concebidos como una totalidad. Si las clases, como Russell suponía, son entidades que han de satisfacer a la definición de Cantor, deben ser "una" (pues si no fuera así, serían meras colecciones aditivas y no auténticas totalidades), aunque en un sentido distinto del que los objetos espacio-temporales son "uno". Pero, en tanto están constituidas por distintos objetos y en tanto asignamos las propiedades y la pluralidad de tales objetos, ellas deben ser concebidas como "múltiples". Así, sólo podemos decir que una clase A pertenece a otra clase B si la clase A es una (mientras que B es múltiple); y sólo podemos decir que una clase A es una subclase de una clase B si A es múltiple. Pero, ¿cómo podemos explicar la posibilidad de concebir a una clase como una y como múltiple? Entendemos que la distinción siguiente está íntimamente conectada con el intento de Russell de contestar dicha pregunta.

c) Clase-concepto. Concepto de una clase y clase

La clase es la entidad matemática en sentido estricto cuya naturaleza Russell está tratando de determinar; la clase-concepto, a su vez, es el predicado que define intensionalmente a la clase; tal clase-concepto nos permite concebir a la clase como una, porque la clase-concepto hace explícita la propiedad común que unifica a todos los elementos de una clase. Por último, pareciera que el concepto de una clase nos permite pensar acerca de una clase como múltiple.[4] Pero ni la clase-concepto ni el concepto de la clase pueden identificarse con la clase misma, porque distintas clases-conceptos pueden definir la misma clase y diferentes conceptos de una clase pueden estar relacionados con la misma clase. Esta proliferación de entidades vinculadas con las clases genera problemas que sólo han de desaparecer cuando Russell cambia su teoría de la denotación en 1905; justamente el mérito principal que Russell mismo ha de encontrar en la nueva teoría, ha de ser la eliminación del problema relativo a la clase como "una" y la clase como "múltiple".[5]

Las clases son pues cierto tipo de entidades, si no lo fueran no podrían establecerse afirmaciones acerca de ellas.[6] Y la matemática muestra claramente que podemos hacerlo. Ellas tienen el mismo tipo de entitatividad que los objetos del pensamiento: tienen ser pero no existen. Pero su ser no depende del hecho de que pensemos en ellas porque "todo aquello que pueda ser pensado tiene ser y su ser es una precondición y no un resultado de su ser pensado".[7] En verdad, Russell encontró un cúmulo de dificultades cuando trató de establecer una teoría coherente capaz de abarcar las diferencias entre entidades existentes; así, pueden percibirse enfoques incompatibles al respecto dentro de *The principles:* ciertos párrafos parecen establecer que la subsistencia excluye a la existencia, mientras que en otros sostiene que las entidades existentes son una subclase de la subsistentes.[8]

Russell se adscribe pues en 1903 a un peculiar platonismo respecto a las clases caracterizado por una no clara determinación del estatus ontológico de las mismas, lo que se manifiesta en la insatisfactoria y no coherente pléyade de distinciones que se ve obligado a establecer. Creemos al respecto que Quine ha simplificado en demasía la concepción que Russell propuso en *The principles.* Quine ha señalado que de acuerdo a *The principles* todo término es o un nombre propio o designa un concepto; luego, como las clases no son conceptos debería de concluirse que son cosas.[9] Pero ello no es así, pues para Russell la existencia está restringida a las cosas y hay un gran número de entidades (las clases entre ellas) que tienen ser pero no existencia. Podemos visualizar ahora con más claridad una de las facetas más importantes del problema del estatus ontológico de las clases de acuerdo al enfoque de *The principles:* ellas no son cosas (porque no tienen el tipo de unidad de las cosas), pero tampoco son conceptos.[10]

Podemos concluir que *The principles* nos presenta una oscura concepción del estatus ontológico de las clases: ellas son un tipo de entidad que no satisface a la propia clasificación de Russell de las mismas. Además no ha sido elucidado su aparente doble carácter una-múltiple. La conclusión al respecto es sorprendente: la clase como "una" es una entidad, pero no hay tal cosa para una clase como múltiple; mas, entonces, tal como cree Russell, ¿cómo podemos hacer aserciones acerca de ella? Finalmente, a pesar de ser obvio que ellas no son entidades existentes, no se ha establecido el tipo de subsistencia.[11] Pero a la vez no podemos prescindir de pensarlas como objeto, porque "sin un objeto correspondiente a las extensiones la matemática se derrumbaría".[12]

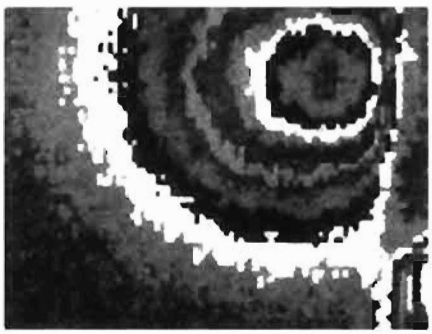
3. En *The principles* hay dos versiones conflictivas del intento russelliano para resolver la paradoja de las clases; ambas están íntimamente conectadas con la distinción "clase como una"-"clase como múltiple".

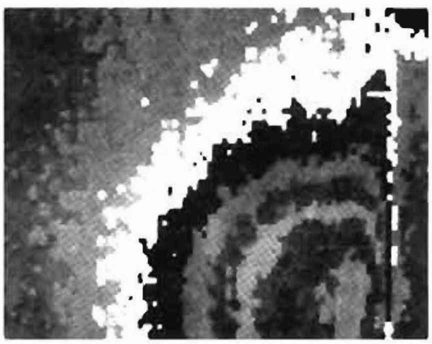
La primera versión (*The principles*, p. 104) asume la existencia de ciertas funciones proposicionales que determinarían a una clase como múltiple pero no a una clase como una: por ejemplo $x \notin x$; en tal caso, no cabe aplicar la ejemplificación existencial a la expresión $(\exists y)(x)(x \in y \equiv x \notin x)$. Sin embargo, el problema con este enfoque es que resulta arduo aceptar que una función determine a una clase que, pese a ello, no es auténticamente una clase porque no es una.

Por esta razón, en la segunda propuesta (*The principles*, apéndice B), todas aquellas funciones que no determinan a una clase como una no son consideradas realmente como funciones: por ejemplo, $x \notin x$. Así, Russell sugiere una teoría extensional de tipos sin órdenes, con el propósito de evitar la formación de expresiones como $x \notin x$. El esquema general termina resultando excesivamente complejo porque asigna tipos diferentes a pares, ternas, etc. Además, permite combinaciones que generan nuevos tipos como, por ejemplo, pares de ternas. Finalmente, fuera de toda esta serie de tipos agrega el tipo "proposición" (como un objeto); y, los números constituyen también un nuevo tipo fuera de la serie. Por supuesto, desde estos nuevos tipos pueden formarse otras series de tipos. Esta compleja estructura categorial evita la paradoja de las clases, pero tiene un defecto radical: permite la emergencia de nuevas contradicciones.

Creemos oportuno redondear nuestra presentación de la concepción de Russell de las clases entre 1901 y 1903 sintetizando las tesis de Russell acerca de los aspectos que creemos íntimamente vinculados con su teoría de las clases: a) concepción de la lógica y de la matemática; b) el estatus de las definiciones y de los principios de una teoría (aspecto sistemático); c) el rol del análisis (aspecto metodológico); d) criterio subyacente de admisión de entidades (aspecto ontológico). Su teoría de las clases puede ser visualizada como corolario de a) - d).

a) La matemática es dividida en pura y aplicada. Aquélla es la clase de todas las sentencias de la forma "p implica q", en las que "p" y "q" contienen las mismas variables pero no contienen constantes no lógicas.[13] El matemático puro opera con entidades hipotéticas reducibles a clases; las clases son, en verdad, aquellas entidades que debemos admitir para permitirnos la fundamentación de la matemática clásica, siendo completamente irrelevante que las propiedades definitorias de tales entidades pertenezcan o no al mundo real. La lógica simbólica se ocupa de la inferencia en general; por ende, su única diferencia con las distintas ramas de la matemática pura es de generalidad. De acuerdo a sus primitivos, la lógica está compuesta por los cálculos proposicional, funcional, de clases y de relaciones. Por lo tanto la relación entre lógica y matemática es múltiple: desde un punto de vista lingüístico, la matemática es lógica simbólica; las fórmulas matemáticas son fórmulas lógicas: si aceptamos el simbolismo lógico podemos introducir los símbolos matemáticos. Desde un punto de vista epistemológico, como las premisas matemáticas utilizan constantes lógicas, "esto nos da la formulación precisa de lo que los filósofos han significado al afirmar que la matemática es *a priori*".[14] Desde un punto de vista ontológico, el mismo supuesto básico subyace a la lógica y a la matemática: "si un término significa algo significado por él". Luego, los términos de clase han de tener un correlato extralingüístico, y si todos los términos lo tienen se concluye que Russell asume un universo ontológico con una notable proliferación de entidades, entre las cuales las lógico-matemáticas subsisten pero no existen. Además, como en el sistema de *The principles* los indefinibles son o constantes lógicas o variables, entonces toda entidad obtenida por definición a partir de los indefinibles es también de naturaleza lógica. Debe pues quedar claro que, en 1903, lógica y matemática son acerca de algo con independiente entitatividad; en verdad, ya en 1902 Russell había concebido a la lógica como una investigación acerca de la esencia inmutable de las cosas actuales y posibles; coherente con ello, en tanto las sentencias de la lógica son acerca de algo y son *a priori*, debe concluirse que las mismas son sintéticas *a priori*.[15] En consecuencia, resulta plausible la tesis russelliana de 1903 señalando que es difícil establecer una clara distinción entre lógica y matemática pura. Russell, al mostrar que la noción cantoriana de clase o conjunto puede ser identificada con la noción lógica de clase, nos ha señalado dónde se encuentra la vía de paso desde





la lógica a la matemática. Además, es el modo en que tal noción es introducida lo que revela su naturaleza lógica, mientras que es la edificación de la matemática a partir de la teoría de las clases lo que exhibe el carácter lógico de aquélla.

b) Como las definiciones han de permitir introducir nuevas entidades aceptables en la teoría, tales definiciones no son meramente estipulativas pues indican las propiedades que las entidades introducidas definicionalmente tienen; a través de ellas se provee de nombre a algo cuyo ser ya ha sido asumido previamente. A su vez los principios son aquellas proposiciones sintéticas *a priori* verdaderas que se adoptan como premisas mayores del sistema, en tanto a partir de ellas puede deducirse el corpus de la lógica y de la matemática pura. Es decir, su verdad es independiente de la experiencia y su adopción depende de su fructicidad deductiva.

c) Los indefinibles de una teoría son aquellas entidades a las que se llega mediante el análisis o, de otro modo, son el residuo final de la aplicación de tal método. Desde dichas entidades se introducen definicionalmente las restantes entidades admitidas en la teoría. Las clases, si bien no eran indefinibles habían de ser admitidas pues eran introducidas a partir de aquéllas por definición.

d) Por todo lo expresado creemos que la teoría de clases satisface, en 1903, a un criterio de admisión de entidades que creemos funcionó implícitamente en *The principles*, y que puede ser formulado como sigue: 1. Deben ser admitidas como entidades de una teoría aquéllas que los indefinibles de una teoría denotan. 2. También han de ser consideradas como entidades de una teoría aquéllas que son introducidas por definición a partir de los indefinibles. 3. Sólo han de ser entidades de una teoría aquéllas que hacen posible la derivación de los distintos capítulos de la matemática. 4. Han de ser eliminadas aquellas entidades que conducen a contradicción.

Se concluye pues que la teoría de las clases de 1903 requería ser modificada. En tal sentido parecía ser necesario efectuar varias transformaciones sustanciales que efectivamente habrían luego de producirse: a) cambio en la concepción del lenguaje que asignaba significado y referente independiente a todas las expresiones por separado; b) restricción del criterio de admisión de entidades, que había resultado excesivamente permisivo c) coherentemente, ha de requerirse un nuevo concepto de clase totalmente distinto al ya considerado.[16] No sólo ha de modificarse el concepto de clase sino también el lugar que él ocupa en la teoría; en 1903 las clases eran consideradas como entidades fundamentales de una teoría fundacional de la matemática;[17] pero, como veremos, las intensiones ocuparan luego el lugar de privilegio. d) quizás el giro filosófico que ha de acaecer consistirá en la inversión de la relación entre metafísica y lógica. En *The principles*, la metafísica determina la lógica a adoptar. Russell estableció en tal obra primero los constituyentes ontológicos y luego adaptó las tesis lógicas a tales supuestos ontológicos. Desde 1903 ha de desarrollarse un proceso que culminará con la inversión de prioridades, de modo que la metafísica dejará de funcionar como *explanans* de las propuestas lógicas.

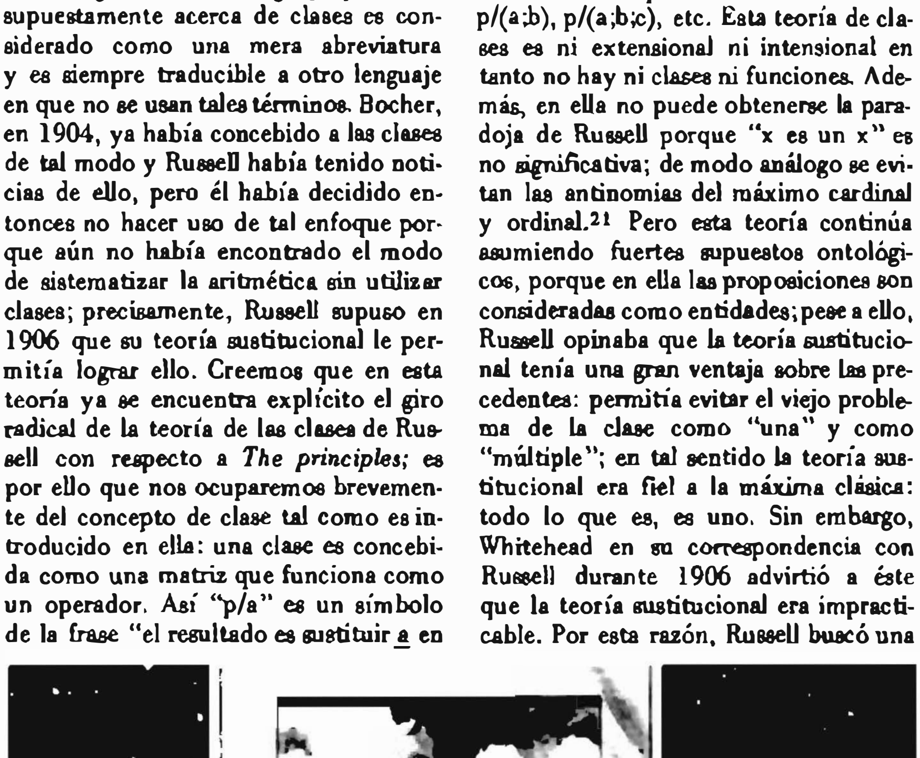
1904-1907: hacia una teoría de las clases sin clases

Russell trató de encontrar, sin éxito, entre 1903 y 1904 la solución de las paradojas; también se ocupó del análisis de cuestiones vinculadas a la teoría del significado y la denotación pero adscrito aún a una postura realista análoga a la sustentada en *The principles*. Los pasos sucesivos que lo condujeron a la solución de los problemas relacionados con las paradojas y con la concepción de las clases puede esquematizarse como sigue:

En 1904 Russell concluyó que, dada una cierta función proposicional ϕ, todas las dificultades que conducen a las paradojas emergen sólo cuando se consideran todos los valores de ϕ; ello era así porque en tal caso producíase un cierto tipo de círculo vicioso. También sugirió al respecto que era necesario pensar que no toda función proposicional debe considerarse como determinando una clase. Así, llamó "impredicativas" a aquellas funciones proposicionales que no determinan una clase. En resumen: era necesario evitar la emergencia de círculos viciosos y la formación de funciones impredicativas. Ambos proyectos se desarrollarán independientemente hasta 1907, cuando han de ser abarcados conjuntamente en una teoría única.

Al comienzo de 1905 Russell descubrió que las funciones impredicativas sólo aparecían cuando la misma variable acaece en posiciones de un tipo diferente, como en $x \in x$; por ende, había que reglamentar la eliminación sistemática de tal tipo de expresiones. Sin embargo, existían aún problemas para implementar técnicamente esta idea. Además, ya en 1905 él tenía claro que los problemas mayores de la teoría de las clases surgían cuando las concebimos como "una" entidad.[18] En "On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types" (1905), son tratadas sistemáticamente las conclusiones antes citadas. En dicho trabajo Russell pretendió resolver el problema de las paradojas restringiendo la formación de clases desde funciones proposicionales, o mediante la eliminación de las clases. Para llevar a cabo la primera línea de pensamiento restringió el "axioma de comprehensión" de modo tal que se evitaba la formación de funciones proposicionales no definidoras de una clase, sin necesidad de apelar a la teoría de tipos. Representó, aunque sólo esquemáticamente, dos versiones diferentes conducentes a obtener tal restricción: la teoría zig-zag y la teoría de limitación del tamaño. La teoría zig-zag prohíbe todas las funciones proposicionales que no satisfacen ciertos requisitos de simplicidad de forma.[19] La teoría de limitación del tamaño formula la restricción no en términos de forma de las funciones proposicionales sino de la limitación del tamaño del conjunto definido; toda supuesta clase que tiene o va más allá de un cierto tamaño límite no es una clase en absoluto; esta versión es adoptada por Ph. Jourdain y es además una anticipación de la teoría de Zermelo de 1908. En verdad, tanto la teoría zig-zag como la teoría de limitación del tamaño procuraron evitar la formación de la clase universal (que conduce a la antinomia cuando se aplica a ella el teorema de Cantor y la definición de clase universal), y ambas tienen éxito con ello. La otra vía para resolver el problema era, como dijimos, la eliminación de las clases. Pero la versión de 1905 al respecto es distinta a otras posteriores, pues en el trabajo que consideramos las clases son también eliminadas notacionalmente; sin embargo, la principal razón por la cual la versión de 1905 fue abandonada radicaba en que la teoría resultaba excesivamente compleja. Pero 1905 resultó un año clave en el desarrollo de la teoría russelliana de las clases; hacia fines de la primavera de dicho año Russell ya había descubierto la teoría de las descripciones; "the", que era una expresión primitva en *The principles*, deja de serlo y consecuentemente la expresión "the class of. . ." (la clase de. . .) deja de ser significativa independientemente de todo contexto, con lo que ya no tiene necesariamente que referir a entidad alguna. Por lo tanto uno de los supuestos ontológicos básicos de *The principles* ha sido abandonado: ya no es cierto que todas las palabras o expresiones de una sentencia son independientemente significativas y que hay siempre una entidad referida por ellas.

En "On the substitutional theory of classes and relations" (mayo de 1906), Russell aplicó por primera vez su nueva teoría de la denotación a la teoría de las clases y entonces todo funcionó satisfactoriamente. Así, él manifestó: "la teoría que yo quiero defender es que clases, relaciones, números y en verdad casi todas las cosas son 'falsas abstracciones' en el mismo sentido en que 'el actual rey de Francia' es una falsa abstracción".[20] Un término de clases no tiene significado alguno por separado, para ciertas sentencias en las cuales tales términos de clase aparecen y tienen realmente significado. El lenguaje que habla supuestamente acerca de clases es considerado como una mera abreviatura y es siempre traducible a otro lenguaje en que no se usan tales términos. Bocher, en 1904, ya había concebido a las clases de tal modo y Russell había tenido noticias de ello, pero él había decidido entonces no hacer uso de tal enfoque porque aún no había encontrado el modo de sistematizar la aritmética sin utilizar clases; precisamente, Russell supuso en 1906 que su teoría sustitucional le permitía lograr ello. Creemos que en esta teoría ya se encuentra explícito el giro radical de la teoría de las clases de Russell con respecto a *The principles;* es por ello que nos ocuparemos brevemente del concepto de clase tal como es introducido en ella: una clase es concebida como una matriz que funciona como un operador. Así "p/a" es un símbolo de la frase "el resultado es sustituir a en p"; es pues un operador como ∇^2 o d/dx y, por lo tanto, no designa por sí mismo entidad alguna. Los contextos en los cuales tales símbolos ocurren significativamente son de la forma "p/a;b", que significa "el resultado de sustituir b por a en p", de modo análogo a como d/dx ocurre significativamente en d/dx f(x). Para indicar el resultado de la aplicación del operador escribimos "p/a;b/q" que significa "el resultado de sustituir b por a en la proposición p es la proposición q", de modo análogo al que en análisis escribimos "d/dx f(x) = g(x)". Debe observarse que en lugar de clase de todos los números naturales podemos tener matrices de la forma "a es un número natural/a". Por tal razón, podemos considerar a "p/a" como un símbolo de clase. Si escribimos "n es primo par/n" esta expresión representa la clase unitaria de 2, por lo tanto podemos afirmar que "p/a" representa la clase de los x tales que "p/a;x" es verdadera; de otro modo: "x es un elemento de la clase p/a" significa "el resultado de remplazar x por a en p es verdadera". Las relaciones son introducidas de modo análogo mediante las expresiones:
p/(a;b), p/(a;b;c), etc. Esta teoría de clases es ni extensional ni intensional en tanto no hay ni clases ni funciones. Además, en ella no puede obtenerse la paradoja de Russell porque "x es un x" es no significativa; de modo análogo se evitan las antinomias del máximo cardinal y ordinal.[21] Pero esta teoría continúa asumiendo fuertes supuestos ontológicos, porque en ella las proposiciones son consideradas como entidades; pese a ello, Russell opinaba que la teoría sustitucional tenía una gran ventaja sobre las precedentes: permitía evitar el viejo problema de la clase como "una" y como "múltiple"; en tal sentido la teoría sustitucional era fiel a la máxima clásica: todo lo que es, es uno. Sin embargo, Whitehead en su correspondencia con Russell durante 1906 advirtió a éste que la teoría sustitucional era impracticable. Por esta razón, Russell buscó una



nueva presentación teórica operativamente manejable que pudiera lograr los mismos objetivos que la teoría sustitucional.

En septiembre de 1906 Russell respondió a objeciones de Poincaré sobre el origen de las paradojas; estuvo de acuerdo con éste acerca de su origen: éstas eran generadas por la presencia de cierto tipo de circularidad, pero a la vez se opuso a la idea de Poincaré que señalaba al infinito actual como responsable último de las antinomias. Es en esta época que Russell adopta explícitamente por vez primera el "principio del círculo vicioso"; es de recalcar al respecto que Poincaré nunca fue capaz de sugerir cuáles eran los medios adecuados para evitar las paradojas.

Hacia fines de 1906 ya Russell había bosquejado su teoría ramificada de tipos, a la cual visualizaba como herramienta indispensable para resolver también las posteriormente llamadas paradojas semánticas. Pero en el mismo año Russell percatose de las dificultades que se originaban si se intentaba reunir la teoría de las no-clases (no-class theory) con la teoría ramificada de tipos; así por ejemplo, no se podían introducir los números reales. Para resolver eso percibió que era necesario introducir el axioma de reducibilidad. Si además recordamos que en marzo de 1906 Russell había considerado la posibilidad de adoptar una versión del axioma de infinitud, entonces podremos concluir que a comienzos de 1907 ya disponía de todas las piezas que era necesario reunir en un todo coherente: el resultado de ello aparece sistemáticamente rigorizado en principio.

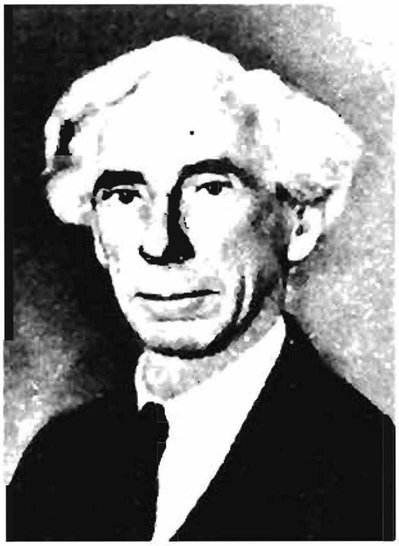
Todo el desarrollo previamente esquematizado nos muestra que a comienzos de 1907 el criterio permisivo de admisión de entidades ha sido remplazado por uno más restrictivo: la nota Z. ha sido abandonada porque todo símbolo o expresión que puede ser definido en términos de los primitivos no necesariamente refiere a un objeto sea cual fuere su tipo de entitatividad.

1908-1910: La teoría de no-clases de *Principia mathematica*

No hay diferencias importantes entre las propuestas de Russell en *Mathematical logic as based in the theory of types*, (1908) y su posterior amplificación y rigorización en *Principia mathematica* (1910). Es por ello que hemos de sistematizar conjuntamente los aspectos centrales de ambas obras para comprender la concepción de Russell acerca del estatus ontológico de las clases que desarrolló en *Principia*. Hemos de considerar brevemente como acápites previos a su teoría de clases a:

A) Principio del círculo vicioso

Russell pensaba desde 1906 que la totalidad de las paradojas sería evitada si se descubría y eliminaba de los razonamientos cierta clase de errores generados por una incorrecta formación de conceptos o definiciones viciosamente circulares, tal como Poincaré había señalado. Russell llamó a éstas, "definiciones impredicativas". Luego el principio del círculo vicioso era propuesto para distinguir y permitir erradicar los conceptos impredicativamente generados y que referirían a totalidades que sería necesario evitar.[22] Como todas las paradojas presuponen totalidades ilegítimas y todas son reducibles a aquéllas en términos de funciones proposicionales y



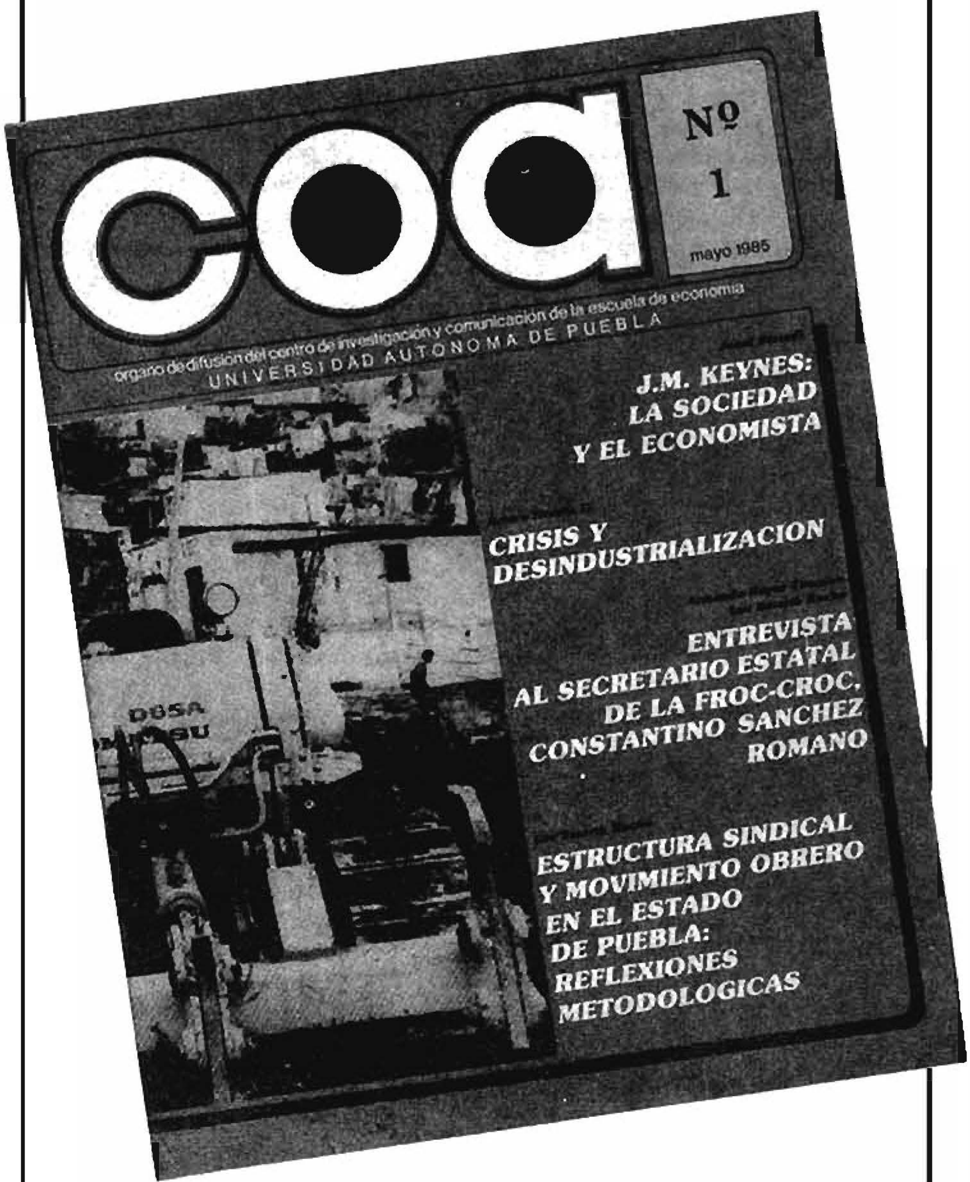
proposiciones, entonces es necesario prevenir la emergencia de círculos viciosos causados por la admisión de funciones con argumentos que presuponen la misma función. Si eso se hace, se respetará la vigencia del principio del círculo vicioso. El intento de evitar la emergencia de tales funciones conduce a la teoría de tipos.

B) Teoría de tipos

Esta es la teoría que indica cómo construir las totalidades legítimas. El presupuesto filosófico que subyace a ella es que el universo de la teoría está compuesto por individuos, atributos y relaciones entre ellos; si se asume, además, que atributos y relaciones pueden ser predicados de atributos y relaciones, se obtiene así una jerarquía abierta de individuos, atributos y relaciones entre individuos, atributos y relaciones entre atributos y relaciones entre individuos y así sucesivamente. Como resultado de predicar adecuadamente atributos o establecer relaciones se obtienen proposiciones. La estratificación en tipos y órdenes es primariamente efectuada en términos de matrices, funciones proposicionales y proposiciones.[23] Pero, aquélla es también traducible en términos de individuos, clases, clases de clases, etc., luego de la introducción del símbolo de clases. Sin embargo, en 1908 y 1910 las funciones proposicionales tenían precedencia sobre las clases, no sólo desde el punto de vista definicional sino también desde la jerarquía de tipos. Mientras que la teoría de tipos de *The principles* era una estratificación de clases reales, las nuevas versiones de 1908 y 1910 no son de naturaleza extensional aunque fueron concebidas como estratificaciones a nivel ontológico.[24] Ha de remarcarse además que estas nuevas versiones de teoría de tipos tienen connotaciones constructivistas: sólo son admitidas aquellas expresiones que se obtienen a través de un proceso de construcción a partir de una totalidad dada de individuos mediante el uso de especificaciones predicativas.[25] Russell encontraba en esta versión de su teoría de tipos tres ventajas con respecto a la de 1903: no aparecía como *ad-hoc*, porque las restricciones se fundaban en una teoría sistemática que permitía resolver las dificultades y obtener nuevas consecuencias; además, no sólo resolvía la paradoja de Russell y las antinomias de la teoría de Cantor, sino también las paradojas semánticas; finalmente, parecían no ser obtenibles nuevas contradicciones en la teoría. Pero la teoría resultante no era conservativa. Por ejemplo, no permitía la aplicación del principio de inducción matemática. Si decimos, como Russell en 1908, "un número finito es uno que posee todas las propiedades que 0 y... tienen", entonces en la teoría ramificada de tipos estamos obligados a restringir tal expresión a todas las propiedades que pertenecen a un cierto orden. En general, no podríamos hablar de la totalidad de propiedades. Como consecuencia, la noción de identidad no podría definirse adecuadamente e importantes teoremas de la teoría del número real se perderían. Russell percibió que para resolver las dificultades planteadas se necesitaban recursos que permitieran reducir el orden de una función proposicional sin afectar la verdad de sus valores. Y también concluyó que eso era obtenible en dos modos: mediante la adopción del axioma de reducibilidad o mediante la suposición de que las clases son entidades reales.

C) Axioma de reducibilidad

Este axioma, $((\exists f):\phi x.\equiv._x f!x)$, afirma que para toda función proposicional cualquiera sea su orden existe siempre una función correspondiente de primer orden (predicativa) que es extensionalmente equivalente a la dada. El permite que todas las funciones proposicionales de primer orden abarquen los resultados que de otro modo requerirían hacer referencia a la totalidad de propiedades (cualquiera sea su tipo). Es interesante observar que si se asumiera la existencia de clases reales el axioma de reducibilidad resultaría supernumerario. En efecto: si hay clases, entonces dada una función proposicional ϕ de cualquier orden hay siempre una clase constituida por los objetos que satisfacen a ϕ. Pero entonces, toda expresión de la forma ϕx puede ser considerada equivalente a "$x \in \alpha$" y tal expresión no tiene variables aparentes; luego, es predicativa y toda sentencia en la cual es usada dicha expresión es de primer orden. Es por esta razón que Russell llamó también "axioma de las clases" al axioma de reducibilidad. Pero si asumiésemos clases reales y pretendiésemos que no surgieran las paradojas necesitaríamos concebir a las clases como diferentes de los individuos, para evitar así que x pudiera ser sustituida por α en $x \in \alpha$. Sin embargo, en tal caso reaparecerían todos los problemas conceptuales de *The principles*. Es por ello que Russell optó por la adopción del axioma de reducibilidad e introdujo, a través de una sutil definición contextual, el símbolo de clase elaborando luego una teoría de las clases que no las asume como reales. Pero no desaparecerían así completamente los problemas vinculados con la adopción de supuestos de existencia, pues el axioma de reducibilidad postula la existencia de ciertas funciones proposicionales; es evidente que tal supuesto desafía el programa logicista de Russell en tanto la lógica no puede hacer aserciones acerca de la existencia o no de entidades. Algo similar acaeció con otros axiomas de *Principia*, tales como el axioma de infinitud y el axioma multiplicativo, pero en verdad ninguno de ellos ha sido objeto de crítica tan vasta como el axioma que nos ocupa. Es ampliamente aceptado que sería necesario eliminar tal axioma porque aparece como un principio existencial sintético fundamentando a la matemática (contra logicismo y formalismo), y como un postulado no-constructivo (contra conceptualismo o intuicionismo). Chwisteck, Ramsey, Carnap y Quine han mostrado que el axioma de reducibilidad puede ser eliminado, pero a un precio que Russell no hubiera aceptado en 1910. Así por ejemplo, Ramsey y Carnap han permitido explícitamente la introducción de conceptos impredicativos (aunque no circulares) y han asumido desde el "vamos" una teoría simple de tipos. Lo importante es que para la versión de la teoría de clases de 1908-1910 imbricada en un sistema que pre-



tendía resolver todos los tipos de paradoja y fundamentar a la matemática, el axioma de reducibilidad resultaba imprescindible.[26]

Ahora podemos centrarnos en la teoría de clases.

Los símbolos de clase son concebidos como símbolos incompletos. Para mostrar que $\hat{x}(\phi x)$ es un símbolo incompleto se requiere, al menos, que sea introducido contextualmente; además tiene que ser introducido desde símbolos ya aceptados (en este caso, desde símbolos de la teoría funcional de tipos).

Por lo tanto la definición ha de ser de la forma:

$f[\hat{x}(\phi x)] = F(\phi, f)$, en la cual F es una cierta función de ϕ y f.

Además, $F(\phi, f)$ tiene que estar íntimamente vinculada con $f[\phi(\hat{x})]$, porque a) $\hat{x}(\phi x)$ es la clase determinada por ϕ; b) si decimos que $\hat{x}(\phi x)$ tiene f, parece plausible afirmar que ϕx tiene f. Sin embargo, no podemos considerar a $F(\phi, f)$ idéntica a $f[\phi(\hat{x})]$; es decir, no podemos definir contextualmente a las clases como sigue: $f[\hat{x}(\phi x)] = f[\phi(\hat{x})]$. Si se las definiese de tal modo, dicha definición violaría una de las condiciones de adecuación que según Russell toda definición de un símbolo de clase debe satisfacer; a saber: todo lo que puede afirmarse acerca de una función (ϕ, en nuestro caso) también debe poder afirmarse acerca de la clase definida por esa función. Pero Russell mismo ha mostrado que esto no acaecería en todos los casos si se adoptase la definición de clase arriba citada. En efecto: la expresión "$f[\phi(\hat{x})]$" es obviamente una función f de la función $\phi\hat{x}$. Hay dos tipos de función de una función $\phi\hat{x}$: extensional e intencional. Por una parte, una sentencia de la forma $f[\phi(\hat{x})]$, es una función extensional f de la función $\phi\hat{x}$, si su valor de verdad permanece inalterado a través de la sustitución de $\phi\hat{x}$ por cualquier función formalmente equivalente a $\phi\hat{x}$. Por lo tanto, la verdad o falsedad de una función f de una función $\phi\hat{x}$ depende de la extensión de su argumento $\phi\hat{x}$ (por definición de extensión de una función). Luego, si la función f de $\phi\hat{x}$ es extensional, entonces $f[\phi(\hat{x})]$ puede ser considerada como afirmando f de la clase determinada por $\phi\hat{x}$. En este caso sería correcto proponer que $f[\hat{x}(\phi x)] = f[\phi(\hat{x})]$. Por otra parte, una función f de una función $\phi\hat{x}$ es intensional si no es una función extensional de $\phi\hat{x}$. Sea $\phi\hat{x}$, $\hat{x}$ es un autor de Waverley, y sea $f\hat{x}$, George IV cree que Scott es $\hat{x}$. Luego, $f[\phi(\hat{x})]$ es, George IV cree que Scott es un autor de Waverley. Si remplazamos, "$\hat{x}$ es un autor de Waverley, por una expresión formalmente equivalente a ella, entonces $f[\phi(\hat{x})]$ no tiene necesariamente el mismo valor de verdad. Por lo tanto, en este caso, la verdad o falsedad de $f[\phi\hat{x}]$ no depende de la extensión de $\phi\hat{x}$, y no puede ser considerada como afirmando f de la clase determinada por $\phi\hat{x}$. En consecuencia, "$f(\phi\hat{x})$" no puede ser usado como *definiens* de "$f[\hat{x}(\phi\hat{x})]$.

Necesitamos pues la función extensional de $\phi\hat{x}$ que esté conectada con $f[\phi(\hat{x})]$ como *definiens* de $f[\hat{x}(\phi x)]$. Russell intentó resolver el problema mediante la introducción de la llamada función derivada de la función f. Ella puede definirse como sigue: por función derivada f' de la función $f[\phi(\hat{x})]$ entendemos la expresión "hay una función predicativa $\varphi\hat{x}$ formalmente equivalente a $\phi\hat{x}$ que satisface f'. La función derivada f' es una función extensional de $\phi\hat{x}$. Además, si $f[\phi(\hat{x})]$ es extensional entonces $f'[\phi(\hat{x})]$ es también extensional y formalmente equivalente a aquélla. Por lo tanto, f' puede considerarse como una aserción acerca de la extensión de $\phi\hat{x}$. (1) Si $f[\phi(\hat{x})]$ es intensional, entonces f', en nuestro ejemplo, podría expresarse como sigue: "hay una función formalmente equivalente a 'x es un autor de Waverley' tal que George IV cree que Scott la satisface". Esta aserción es verdadera porque es verdad que siempre hay una función formalmente equivalente a "x es un autor de Waverley ('x es idéntico a Scott') y, por supuesto, George IV cree que Scott la satisface". Luego, f' ha de ser también verdadera si sustituimos a "x es un autor de Waverley" por cualquier función formalmente equivalente a ella; por ejemplo "x es un autor de Ivanhoe". En consecuencia, f' es satisfecha por todas las funciones formalmente equivalentes a la función ϕ. Por ello, f' puede ser considerada como la extensión de la función ϕ que tiene f.(2)

De(1)y(2) puede escribirse como definición contextual del símbolo de clase $\hat{x}(\phi x)$ a la expresión:

$f[\hat{x}(\phi x)] = (\exists\varphi)\,(\varphi!x \equiv_x \phi x . f\varphi)$. Df. 20.01 de *Principia*. Es decir: afirmar una proposición que establece que la clase determinada por la función $\phi\hat{x}$ tiene la propiedad f es afirmar que hay funciones predicativas $\varphi\hat{x}$ formalmente equivalentes a $\phi\hat{x}$ que tienen f. Esta definición muestra que las clases como símbolos incompletos adquieren significado a través de intensiones. Además, Russell mostró que esta definición satisface los cinco requisitos por él estipulados que un símbolo ha de llenar para servir como símbolo de clase sin violar el principio del círculo vicioso.[27] Aplicando la definición puede probarse $(\exists\varphi!)\ (\hat{x}(\phi\hat{x}) = \varphi!x)$. Sin embargo, $\hat{x}(\phi\hat{x})$ no puede identificarse con $\phi\hat{x}$ porque: a) ello significaría identificar clases con un cierto tipo de funciones proposicionales y Russell no lo aceptaría porque una clase puede ser definida a partir de cualquiera de las funciones proposicionales formalmente equivalentes a la dada, pero no puede ser identificada con ninguna de ellas en particular más que con cualquiera de las otras a las que es formalmente equivalente; b) ello involucraría que $\hat{x}(\phi x)$ no es un símbolo incompleto y por ende tendría un significado independiente de todo contexto en abierta oposición a lo que Russell sostiene en *Principia* (1910). En síntesis, una clase no puede ser identificada con función proposicional alguna.[28]

Por otra parte, a partir de la definición contextual de clase (20.01) y asumiendo:

$x \epsilon \varphi!z = \varphi!x$ Df. 20.02

y $x = y = (\varphi)(\varphi!x \equiv \varphi!y)$ Df.13.01

puede probarse

$\vdash . \varphi x \equiv_x \phi x : \equiv . \hat{z}(\varphi z) = \hat{z}(\phi z)$ 20.05

Que es la propiedad fundamental de las clases en tanto establece que dos funciones proposicionales determinan la misma clase si y sólo si son formalmente equivalentes. Luego, puede obtenerse,

$\vdash . \alpha = \beta . \equiv : x \epsilon \alpha \equiv_x x \epsilon \beta$ (20.43) que estipula la condición de identidad de clases.

Además puede garantizarse que todas las clases pueden ser obtenidas desde funciones predicativas. Simbólicamente.

$\vdash (\exists\phi) : \hat{z}(\varphi z) = z(\phi!z)$ 20.151

Si se define cuantificación sobre clases como sigue:

$$(\alpha) . f(\alpha) = (\phi) f[\hat{z}(\phi z)] \qquad \text{Df. } 20.07$$

$$(\exists \alpha) f(\alpha) = (\exists \phi) f[\hat{z}(\phi z)] \qquad \text{Df. } 20.08$$

entonces, podemos formular enunciados acerca de clases, clases de clases, y así sucesivamente; íntimamente vinculado a ello, Russell probó un número de propiedades tales como $\vdash : \alpha = \beta \equiv : g!\alpha \supset g^{g}!\beta$ (20.71), que aparecen como formalmente análogas a las propiedades del parágrafo 13 (*Principia*) acerca de individuos. Por esta razón, expresiones tales como $\hat{z}(\phi z)$ si bien no tienen un significado independiente, poseen análogas propiedades a las de los símbolos con significado independiente como símbolos de individuo. Este hecho nos explica por qué estamos inclinados a cosificar las clases o a concebirlas como si fueran individuos a pesar de carecer de entitatividad; en verdad, las expresiones en que aparecen símbolos de clase son meramente modos alternativos de hablar acerca de atributos.

¿Por qué introducimos el símbolo de clases?

En primer lugar, porque es operativamente más simple trabajar con clases que con funciones proposicionales; luego de introducir el símbolo de clases podemos operar como lo hace el matemático; es decir, dejando de lado la notación funcional y operando exclusivamente con la notación de clase. Además, porque él nos permite transformar en expresiones de primer orden proposiciones que refieren a una totalidad de funciones sin requerir de la enunciación explícita de ellas ni de sus órdenes. Finalmente, porque existe para la notación de clases un criterio no-opaco de identidad, cosa que no sucede con los atributos.

Nos corresponde proponer las siguientes conclusiones acerca de la concepción de las clases en *Principia* a modo de paralelo de las ya establecidas para tal concepción en *The principles:*

a) Los símbolos de clases nos proveen de una notación que nos permite operar en matemáticas sin necesidad de adoptar supuestos de existencia acerca de ellas. Russell ha señalado que la teoría de las no-clases también nos permite abstenernos de toda afirmación acerca de la no existencia de las clases. La concepción de las clases es una forma de agnosticismo.

b) En relación a la lógica y la matemática Russell continúa manteniendo que ellas están constituidas por proposiciones sintéticas *a priori* acerca de entidades que tienen ser (universales), pero tales entidades no son clases. Es decir, que el abandono de las clases como entidades no involucró el abandono de los universales como subsistentes ni negar el carácter sintético *a priori* de las proposiciones lógico-matemáticas.[29]

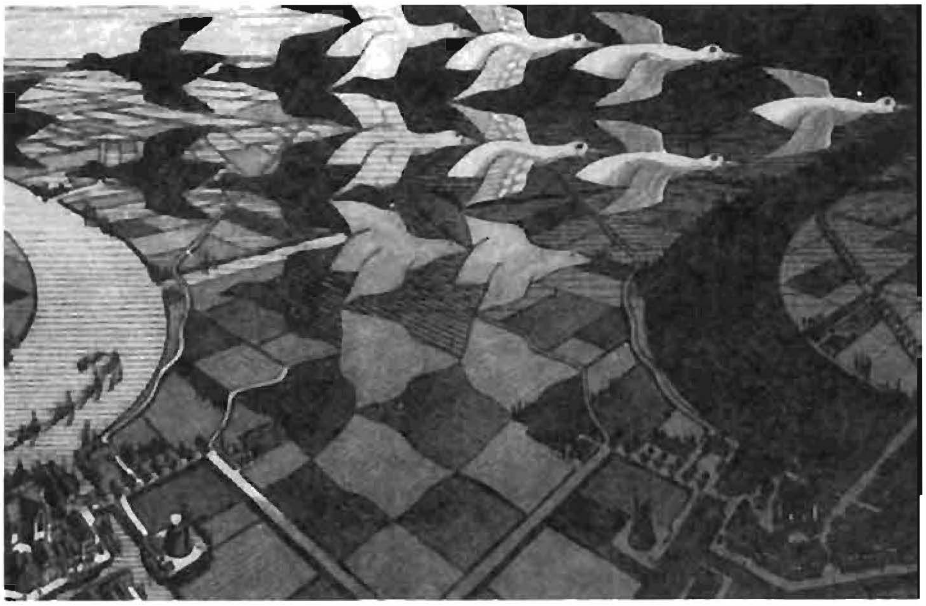
Pero ahora la nueva teoría de las clases ha sido imbricada en una concepción de la lógica que ha variado desde *The principles.* Lógica y matemática se justifican inductivamente. Russell ya había afirmado en 1907 que los teoremas de un sistema proporcionan una justificación para sus axiomas y no conversamente. Es decir, en *Principia* la matemática justifica a la lógica; a partir de nuestras proposiciones matemáticas somos conducidos (por inducción y abstracción) a un conjunto de premisas lógicas desde las cuales podemos deducir, por ejemplo, la teoría cantoriana de los transfinitos. Coherentemente con ello, los axiomas de la lógica son menos obvios que sus consecuencias matemáticas aunque su evidencia es en ambos casos *a priori.*[31] Si es así, no podemos garantizar que somos infalibles al adoptarlos como principios; es decir, las premisas lógicas han perdido su carácter de premisas ineludibles y han devenido "el hasta un determinado momento *minimum* irreducible de supuestos desde los cuales puede ser deducida la matemática ordinaria". En general, pues, los principios de un sistema se han reducido a meros postulados. La teoría de la definición también se ha modificado; a través de las definiciones se introduce un nuevo símbolo para indicar que, por separado o en combinación con otros símbolos, es equisignificativo con otra combinación de símbolos cuyo significado ya es conocido; luego las definiciones no son ni verdaderas ni falsas ni presuponen la existencia de objeto alguno que funcione como correlato de los símbolos que se introducen a través de las definiciones. Si, por ejemplo, el símbolo de clases es introducido definicionalmente, ello significa que es teóricamente prescindible.

c) El método de análisis es también en 1910 el método para arribar a los indefinibles; pero ahora, en vista del nuevo estatus de los principios del sistema, la ontología compuesta por las entidades denotadas por los indefinibles tiene un carácter provisional pues no podemos ser conclusivos sobre la no-existencia de ideas básicas más simples. Tal ontología se justifica también inductivamente: ella es la que permite justificar la derivación de la matemática. En este sentido, *Principia* puede ser entendida como una rigurosa justificación de la tesis de que las clases no pertenecen a tal ontología.

El criterio de admisión de entidades también ha cambiado radicalmente. Ahora no es suficiente que una entidad no conduzca a contradicciones para aceptarla en la ontología de la teoría. Tal requisito permisivo ha sido remplazado por uno nuevo: las entidades aceptadas en una teoría son aquéllas de las cuales no puede prescindirse para construir la teoría. Ello supone que el requisito 2 que funcionaba en 1903 y fue abandonado en 1906 continúa no teniendo vigencia. Pero no hay duda que la nueva teoría de las clases conduce a la cuestión acerca del estatus de las funciones proposicionales. Russell en *Principia* parece oscilar entre concebirlas como entidades meramente lingüísticas o como atributos. La elucidación de esta cuestión va más allá de los alcances de nuestro trabajo, pero creemos que constituye uno de los más importantes problemas de la concepción de Russell acerca de la ontología de la matemática.

Conclusiones

Parece plausible establecer que desde 1903 hasta 1910 tuvo lugar un proceso de desplatonización acerca de las clases. Este proceso fue acompañado por algunas transformaciones fundamentales, como el cambio en la concepción de la relación entre lenguaje, contenido significativo y referente extralingüístico (la teoría de las descripciones constituye el núcleo de tal cambio), las modificaciones en el criterio de admisión de entidades, las alteraciones en la teoría de la definición, el nuevo rol asignado a los principios de una teoría, el nuevo modo de entender la relación entre lógica y metafísica, y el paso de un optimismo metafísico a un agnosticismo con respecto a las clases. En toda esta evolución Russell nunca negó la utilidad de las clases como recursos técnicos. Este desarrollo, a su vez, no debe confundirse con las alteraciones de su teoría de los universales; en verdad, Russell nunca abandonó su creencia en la existencia de universales pero, como vimos, no acaeció lo mismo acerca de las clases.



Sin embargo, hay también invariantes muy sugestivos: a) la búsqueda del vocabulario mínimo de cada teoría; así Russell trató siempre de aislar los indefinibles para las entidades básicas que era necesario asumir; b) la utilización del método de análisis para arribar a tales indefinibles; c) la presencia constante de un factor pragmático en la admisión de entidades: son admitidas como entidades aquellas que son necesarias para la derivación de las teorías matemáticas; d) la concepción, de tipo aristotélico, de la relación entre vocabulario primitivo de una teoría y el dominio de entidades que tal teoría pretende abarcar: hay un dominio entitativo presupuesto y los términos primitivos pretenden referir a determinados entes de tal dominio que se asume como previo e independiente respecto a la sistematización que la teoría efectúa de él; por lo tanto, los axiomas y teoremas enuncian propiedades y relaciones entre los objetos de tal dominio. Este punto de vista se opone a toda versión convencionalista de la lógica y de la matemática, según la cual los objetos de la teoría son los antes definidos implícitamente a través de los axiomas de la teoría. Russell siempre se opuso a toda interpretación convencionalista de las proposiciones lógico-matemáticas; éstas tienen notas distintivas que no son el resultado de una decisión del lógico, sino que son características que pertenecen a tales proposiciones.

En relación a la tesis logicista misma, *Principia* nos muestra que si el intento fue exhibir que la matemática es derivable desde la lógica, debe concluirse que tal meta no fue alcanzada, porque Russell se vio forzado a introducir supuestos extralógicos para derivar la matemática clásica; pero *Principia* mostró a la vez que no es posible establecer una clara línea demarcatoria entre lógica y matemática; así, la teoría de las clases no es sólo una teoría lógica, sino también una formulación de la teoría de conjuntos. A través de dicha teoría, lógica y matemática se fusionan en un todo continuo. Por lo tanto, si se aceptase como versión atenuada de la tesis logicista afirmar una suerte de continuidad (en el sentido de no clara demarcación) entre lógica y matemática, entonces *Principia* habría exhibido la alta plausibilidad de tal tesis. Por otra parte, entendemos que el aspecto filosófico más importante que *Principia* revela en relación a la tesis logicista es que ha invertido la relación entre lógica y metafísica: ahora la lógica regimenta la adopción de supuestos metafísicos. No se adoptan como presupuestas lógicas aquéllas que se adaptan a presupuestos metafísicos independientes sino que la lógica adoptada, en tanto funcional a la reconstrucción de la matemática, determina las entidades y supuestos a adoptar. En tal sentido, podría hablarse de una interpretación fuerte de la tesis logicista en tanto la lógica determina a la metafísica por la matemática.[33]

Queremos cerrar nuestra propuesta con la que nos parece la conclusión más importante de la teoría russelliana de las clases: nos interesa enfatizar que Russell, en nuestra opinión, propuso una concepción de las clases que es completamente distinta a las conocidas desde Cantor hasta nuestros días y que difiere de la interpretación que de ella han hecho sus críticos más conspicuos. Tal concepción es quizás la única teoría estrictamente intensional de las clases.

Expliquemos brevemente nuestra tesis: Russell siempre tuvo una actitud peculiar hacia las clases. A lo largo del desarrollo de su filosofía de la matemática encontró un número de importantes problemas que le impidieron proponer una teoría de clases que él considerara suficientemente satisfactoria. Así Russell concluyó que, por una parte, las clases consideradas como entidades actuales conducen a contradicciones y a problemas conceptuales acerca de su peculiar tipo de entitatividad y, por otra parte, si ellas fueran concebidas como meros recursos simbólicos entonces el programa original del logicismo aparecería desafiado porque se requeriría la adopción de supuestos no lógicos obviamente distantes del sentido común, como el axioma de reducibilidad. En verdad, Russell nunca pudo conciliar en su teoría de las clases tres objetivos importantes que él explícitamente trató de alcanzar: el uso de la teoría para eliminar las paradojas, la construcción de la matemática y la satisfacción de su creencia de que toda teoría lógica debe apelar al sentido común.

Todos estos sentidos problemáticos relacionados a la teoría de las clases se reflejan en un rasgo constante del pensamiento de Russell: la preeminencia de las intensiones. Todas las definiciones de clases por él presentadas lo son en términos de intensiones y pese a ello nunca consideró a las clases como recurso válido para prescindir de las intensiones. Es más, él siempre procedió como si el asumir intensiones no generase problemas análogos a los generados por las clases. Así por ejemplo, Russell consideró problemático que una clase (en tanto una) pudiera tener muchos miembros, pero no vio problema alguno en que un único atributo pudiera ser aplicado a muchas cosas. Desde un punto de vista ontológico él asumió consistentemente las intensiones; así presupuso "x es un hombre" y finalizó considerando que "x es un hombre" es sólo un recurso lingüístico.

La pregunta clave es, ¿por qué Russell no consideró problemático partir de intensiones? La razón no es meramente técnica, porque él mismo reconoció las ventajas operativas de trabajar con clases. ¿Pensó él quizás que la reducción a sentencias acerca de intensiones involucraba un paso adelante en la dirección correcta hacia un nominalismo de particulares y notaciones? No lo sabemos, pero sí podemos afirmar que si hubiera procedido conversamente le hubiese sido imposible partir de individuos y clases reales, pues se hubieran suscitado los problemas ontológicos acerca de las clases ya conocidos desde *Principles*. Todo parece conducir a una referencia por los atributos, como si al definir las clases sobre la base de una teoría de atributos se estuviera explicando lo oscuro —clases, en su caso— en términos de lo más claro.[34] Este aspecto está en completa oposición respecto a las concepciones de matemáticos y filósofos acerca de clases y atributos.

Nuestra interpretación es opuesta incluso a la efectuada por críticos de Russell recientemente. Así, R. Jager afirma:

> En *Principia mathematica* él mismo dio una variedad de razones para extender a las propiedades en general el privilegio que primero había reservado a las "propiedades numéricas"; esto es, tener una propiedad ha de ser explicado en términos de ser miembro de una clase, y tener una propiedad en común en términos de ser miembros de la misma clase. Durante un tiempo él sostuvo tanto que tener una propiedad era tener una relación externa con otro término, como que para algunas propiedades tener esa propiedad era ser miembro de una clase. Pero por razones lógicas no relevantes encontró más y más conveniente adoptar el punto de vista que en todos los casos la relación externa en cuestión era "ser miembro de" y el término en cuestión era de clase.[35]

Creemos que nuestro trabajo ha contribuido a mostrar que el desarrollo de la concepción de las clases de Russell no siguió la trayectoria reseñada por Jager y, muy especialmente en *Principia*, la concepción nos parece claramente intencional. Es pues la sorprendente preferencia por las intensiones, lo que una investigación histórica más detallada habría de contribuir a explicar.

REFERENCIAS

1 B. Russell, **The principles of mathematics** (New York: Norton and Co., 1903), Cap. II-B, pp. 18-23.

2 Sin embargo, las relaciones, a su vez, son concebidas intensionalmente en esta obra.

3 Russell, *op. cit.*, p. 20.

4 *Ibid.*, p. 80: Comenzando por "humano" distinguimos (1) la clase-concepto "hombre", (2) los varios conceptos denotativos "todos los hombres", "cada hombre", "cualquier hombre", (3) los objetos denotados por estos conceptos, de los cuales aquél denotado por "todos los hombres" fue llamado "la clase como múltiple", de modo que "todos los hombres" (el concepto) fue llamado el concepto de la clase, (4) la clase como "una".

5 Las dificultades que esta teoría de 1901-1903 presenta se visualizan a través de la evidente incoherencia que la misma presenta, "si bien la clase-concepto permite pensar a la entidad como 'una' tal clase-concepto" no denota (*ibid.*, p. 67); en cambio el concepto de la clase, que permite pensar a la clase como múltiple denota a dicha clase. Podría pensarse que "la clase como una" y "la clase como múltiple" fueron utilizados como dos rótulos distintos para hablar del mismo objeto pensado de modos distintos; pero debemos desechar esta hipótesis porque Russell mismo enfatizó que la clase como una y la clase como múltiple son dos entidades distintas (*Ibid.*, p. 80).

6 Russell, *op. cit.*, p. 449: "Números, los dioses homéricos, relaciones, quimeras y espacios tetradimensionales tienen todos ser, pues si no fueran entidades de un cierto tipo no podríamos hacer proposiciones acerca de ellas".

7 *Ibid.*, p. 51.

8 Russell necesitaba apelar a la subsistencia para poder siempre afirmar o negar existencia a algo, y, además, para hablar acerca de entidades no-espaciotemporales (ejemplo, clases); sólo su nueva teoría de la denotación ínsita en su teoría de las descripciones de 1905 le permitirá evitar las categorías de existencia y subsistencia respecto a las clases.

9 W. Quine, "Russell's ontological development", en **Bertrand Russell**, edit. D.F. Pears (Garden City, N. York: Doubleday and Co., 1972), pp. 290-305.

10 Además, suponer como lo hace Quine, que Russell concebía a las clases como cosas contradiría un rasgo fundamental de su logicismo (e incluso del logicismo de Frege): el estatus lógico de los números naturales. De acuerdo a Frege los números naturales son atributos de conceptos y no cosas (en términos russellianos son clases de clases). Luego, ellos no son ni cosas ni propiedades de cosas, y en consecuencia las clases tampoco pueden serlo.

11 ¿Son las clases subsistentes en el mismo sentido en que lo son las quimeras o la raíz cuadrada de siete? Parece difícil que así lo fuera; pero, en tal caso, restaría por determinar las notas distintivas. Por otra parte, la falta de una precisa concepción de las clases se corresponde con la ausencia en **The principles** de una clara concepción del estatus de las funciones proposicionales desde las cuales se generan. Esto se pone de manifiesto en el hecho de que Russell no ha descubierto aún la condición restrictiva para la generación de clases desde funciones proposicionales; esta condición restrictiva será posteriormente fundamental para evitar la emergencia de contradicciones, las cuales constituían para Russell la principal evidencia de que algo había sido pasado por alto en la concepción de las clases.

12 Russell, *op. cit.*, p. 515.

13 H. Putnam en "The thesis that mathematics is logic" llamó "if-thenism" a esta versión del logicismo. Pero Putnam señaló además (creemos que erróneamente) que ella fue posteriormente remplazada por la versión de **Principia** de la reducción de la matemática a la lógica (derivabilidad desde la teoría de las funciones proposicionales). En verdad, Russell continuó adscribiendo al if-thenism con posterioridad a **The principles** y a **Principia**.

14 Russell, *op. cit.*, p. 8.

15 El carácter sintético *a priori* de las proposiciones de la matemática ya había sido propuesto por Russell en **The philosophy of Leibniz** (1899) y ha de ser mantenido hasta 1912 (**The problems of philosophy**). Wittgenstein será quien hará que Russell altere su posición acerca de la naturaleza de las proposiciones de la lógica y de la matemática.

16 Russell visualizó a tal extremo la necesidad de modificar su concepción de las clases que llegó a proponer una teoría de la aritmética que prescindía de las clases, suponiendo que de tal modo no podrían surgir las paradojas; pero su descubrimiento en 1903 de la versión intensional de su paradoja, púsole de manifiesto que nada se ganaba sin clases.

17 Así, Russell afirma: "Apareció a lo largo de todo el desarrollo que aunque el trata-

miento simbólico debe trabajar mayormente en clases-conceptos e intensiones, las clases son más fundamentales para los principios de la matemática". (*op. cit.*, p. 81).

18 En abril de ese año el matemático Bocher le había escrito diciéndole: "Yo no puedo admitir que una clase es en sí misma una entidad; para mí es siempre una multiplicidad de entidades; cuando hablamos de ellas como una entidad única estamos hablando de un nuevo objeto que asociamos con la clase, pero no de la clase misma.

19 Véase, B. Russell, **Essays in Analysis**, edit. D. Lackey (London: Allen and Unwin, 73) pp. 146-147.

20 *Ibid.*, p. 166.

21 Para lograr ello las matrices fueron subdivididas en tipos: el tipo de una matriz estaba dado por el número de sus lugares de sustitución. A su vez, los tipos eran subdividibles en subtipos de acuerdo a que los lugares de sustitución fueran de individuo o proposicional.

22 Hay en **Principia** tres formulaciones diferentes del principio del círculo vicioso: 1) "Si supuesto que una cierta colección tiene total, y ella tuviese miembros sólo definibles en términos de ese total, entonces dicha colección no tiene total." (**Principia**, p. 37). 2) "Es posible incurrir en falacia de círculo vicioso desde el 'vamos' mediante la admisión como argumentos de una función proposicional de términos que presuponen a la función" (**Principia**, pp. 38-39). 3) "Ninguna función puede tener entre sus valores alguno que presuponga a la función porque si los tuviera no podríamos considerar como determinados a los objetos denotados ambiguamente por la función hasta que la función fuese determinada, mientras que conversamente, como hemos visto, la función no puede ser determinada hasta que sus valores sean determinados" (**Principia**, p. 39). Russell consideraba estas enunciaciones como casos particulares del mismo principio. Acerca de si era realmente así, véanse las posiciones antagónicas de Gödel, que les supone distintos, y Chihara que sustentó la tesis opuesta, en K. Gödel, "Russell's mathematical logic" en P. Benacerraf y H. Putnam, edit. (N. Jersey: Prentice Hall, Englewood Cliffs, 64), pp. 217-229 y R. Chihara, "Russell's theory of types" en **Bertrand Russell**, ed. D. Pears (*op. cit.*, pp. 248-249). El título en la obra editada por Benacerraf y Putnam es **Philosophy of mathematics**. Pero lo realmente importante es que la característica definitoria de la clase "y" que da lugar a la paradoja es "$(x)(x \epsilon y \equiv x \notin x)$", pero esta expresión viola el principio del círculo vicioso porque incluye a "y" en el rango de la cuantificación usada para especificar a "y" misma, es decir, presupone a "y" para definir "y". Luego, para evitar las paradojas ha de evitarse la violación del principio del círculo vicioso.

23 La implementación técnica de esta idea puede reseñarse como sigue: los tipos son el rango de significación (conjunto de argumentos para los cuales tienen valores) de las funciones. El primer tipo está constituido por los individuos (éstos son términos de las proposiciones elementales, es decir de aquellas proposiciones que no contienen variables aparentes (ellos son aquellos objetos que no son ni proposiciones ni funciones). Para introducir los órdenes utiliza el concepto de matriz: ella es toda función proposicional de cualquier número de argumentos que no contiene variables aparentes. A continuación se estratifican las matrices (y también las funciones y proposiciones que pueden obtenerse por la generalización de matrices) como sigue: las matrices de primer orden son aquéllas que sólo tienen individuos como argumentos. Una matriz de orden $n (n > 1)$ es aquélla que tiene al menos una matriz de orden $n-1$ como argumento. El orden de una función proposicional es el menor entero mayor que el orden de todas sus variables ligadas. Si la función tiene varios argumentos y el mayor orden de la función que aparece entre los argumentos es n, entonces decimos que la función es predicativa si es de orden $n+1$ (luego, las matrices son funciones predicativas). La teoría así estratificada elimina efectivamente las funciones proposicionales impredicativas. Hemos tratado de sintetizar la presentación de la teoría de tipos tal como Russell-Whitehead la formulan; pero ella es susceptible de ser interpretada de modos distintos (véase al respecto R. Chihara, *op. cit.*, y S. Kleene, **Introduction to mathematics**, Amsterdam, North Holland, 59, p. 44). Esta multiplicidad de interpretaciones no es contraria a la teoría russelliana, porque Russell mismo ha indicado que la forma particular que la teoría adopta es no necesaria; lo importante es que permite evitar las paradojas mediante la prohibición de ciertas clases de inferencias que de otro modo resultarían válidas.

24 En verdad, Quine (*op. cit.*) y Reinchembach (**The philosophy of B. Russell**, edit. P. Schilpp, pp. 355-377) han afirmado que la jerarquía de órdenes y tipos en 1908 y 1910 no tenía connotaciones ontológicas. Pero Russell mismo en uno de sus últimos comentarios acerca de la cuestión, ha enfatizado que su definición de tipos de **Principia** fue errónea porque la había concebido ontológica y no simbólicamente. Véase, vol. Schilpp, *op. cit.*, p. 691.

25 Gödel (*op. cit.*) ha enfatizado tal carácter constructivista de la teoría de tipos ramificada; en su opinión el principio del círculo vicioso sólo es plausible si las entidades involucradas son construidas por la actividad del matemático; si, por el contrario, los objetos existiesen independientemente de su eventual construcción, entonces la existencia de totalidades que contienen números que sólo pueden ser descritos a través de la referencia a tal totalidad no involucra absurdo alguno.

26 La teoría ramificada más el axioma de reducibilidad (Tr+ AR) así propuesta, da como resultado una teoría estratificada en individuos y funciones distinta de la versión ramificada original. Surge entonces una importante pregunta: ¿es la teoría así resultante predicativa? Convendría elucidar previamente el significado de la expresión "teoría predicativa". Es conveniente distinguir al menos tres sentidos de tal expresión vinculados con los tres diferentes sentidos en que Russell usa la expresión "predicativa". Si esta expresión es usada para expresar que una función es predicativa si no genera clases que conducen a contradicciones (sentido empleado en 1904), entonces la Tr + AR es predicativa. Si "predicativa" es usada para expresar que todas las funciones proposicionales son de primer orden (sentido de **Principia**, 1910), entonces el sistema es impredicativo porque AR sólo es aplicado a aquellas expresiones que involucran totalidades de un cierto tipo, pero pueden continuar existiendo aquellas totalidades que no son predicativas (aquéllas que no son predicativas pero que satisfacen las reglas de tipos y órdenes y no requieren que les sea aplicado el axioma de reducibilidad). Finalmente, si "predicativo" es usado para expresar que todos los conceptos que pueden ser generados son predicativos, entonces la pregunta no es tan fácil de responder. Dicha pregunta puede ser formulada como sigue: ¿puede garantizarse que es imposible la emergencia de definiciones impredicativas en tal sistema? (Recordemos que se dice que una definición es impredicativa si define un concepto en términos de una totalidad a la cual el concepto pertenece). Nos parece que Russell-Whitehead no han dicho palabra alguna al respecto: ellos procedieron como si el sistema fuera predicativo. Además, la tesis de Chwisteck, Ramsey y Carnap obliga a reconocer que Tr + AR resulta un sistema impredicativo, porque ellos no trabajaron a la Russell, sólo usando conceptos predicativos. Por otra parte, según Church (**Introduction to mathematics logic**, p. 355 y nota a pie de la misma página), Quine habría probado que Tr + AR es impredicativa ("On the axiom of reducibility", Mind 45 (1936), pp. 498-500). Sin embargo, para lograr tal prueba Quine utilizó el principio de extensionalidad parcial para funciones proposicionales: él identifica funciones que son formalmente equivalentes y del mismo orden. En símbolos: $\phi x \equiv_x \phi x \supset \phi \hat{x} = \phi x$. Pero en **Principia** Russell-Whitehead nunca hubieran aceptado tal principio, pues él conduce a la identificación de clases y funciones proposicionales que, como hemos de probar, es negado en 1910. Además, el principio de extensionalidad parcial, que fue utilizado en la segunda edición de **Principia** (1925), presupone que se ha eliminado el axioma de reducibilidad tal como acaece en dicha edición. Es decir: el principio de extensionalidad parcial, si bien es consistente con **Principia** (segunda edición), no lo es con **Principia** (1910). Luego, no es correcto utilizarlo para probar que Tr+AR es impredicativa. En verdad estaría partiendo de la tesis que se quiere demostrar, pues si se acepta tal principio de extensionalidad el sistema es de hecho impredicativo, tal como Russell mismo afirmó con respecto al sistema de 1925. Por lo tanto, creemos que Quine no logró probar que AR+Tr (1910) es impredicativa. Sin embargo, resultaría muy arduo defender la imposibilidad de definiciones impredicativas en el sistema resultante, porque tal imposibili-

dad parece depender de la adopción de una actitud constructivista, que automáticamente se abandona cuando se agrega el axioma de reducibilidad a la teoría ramificada de tipos. Nino Cochiarella en "Mathematical Knowledge: A Review" **Philosophy Israel Quaterly** (1978), ha señalado que Tr+AR "es impredicativa en tanto establece la disponibilidad de conceptos o funciones proposicionales de un cierto tipo mediante cláusulas de comprensión o especificación que involucran la cuantificación sobre todos los conceptos o funciones proposicionales de ese tipo" (nota p. 3).

27 Tales requisitos son (**Principia**, pp. 76-77) 1) toda función proposicional determina una clase. 2) dos funciones proposicionales formalmente equivalentes determinan la misma clase. 3) funciones proposicionales que determinan la misma clase son formalmente equivalentes. 4) en el mismo sentido metafórico en que decimos que hay clases, decimos también que hay clases de clases, . . . 5) no es significativo afirmar que una clase es idéntica a uno de sus miembros.

28 Por esta razón Russell continuará afirmando que las clases tienen un "shadowy being": ello puede entenderse como señalando que ellas tienen aún una "shadowy" diferencia con las funciones proposicionales.

29 Russell, "The philosophical implications of math, logic", en **Essays in analysis** (*op. cit.*), p. 293. "Lógica y matemáticas nos fuerzan a admitir un tipo de realismo en sentido escolástico; esto es, a admitir que hay un mundo de universales y de verdad que no se basa directamente sobre determinada existencia particular. Este mundo de universales debe subsistir. Tenemos conocimiento inmediato de un número indefinido de proposiciones acerca de universales; éste es un hecho tan básico como lo es la sensación" B. Klemke en "Logic and ontology in Russell's philosophy" **Essays** on B. Russell (Urbana: University of Illinois Press) pp. 416-455, ha afirmado que el carácter sintético *a priori* de las proposiciones lógicas se justifica en la referencia extralingüística de dichas proposiciones. Es cierto que eran sintéticas *a priori* para Russell en 1910, pero no resulta convincente la razón que de ello proporciona Klemke cuando afirma que la referencia extralingüística es el fundamento de tal carácter. En efecto: la referencia extralingüística no basta para garantizar el carácter informativo (sintético) de las proposiciones.

30 Véase, "The regressive method of discovering the premisses of mathematics", en **Essays in analysis** (*cit.*), p. 275.

31 "En lógica matemática son las conclusiones quienes tienen el máximo grado de certeza: cuanto más nos acercamos a las últimas es mayor la incerteza y dificultad que encontramos". B. Russell, "The philosophical implications of mathematical logic", *cit.*, p. 285.

32 B. Russell, "The regresive method. . .", *cit.*, p. 282.

33 Es por ello que no coincidimos con H. Putnam cuando afirma que el tipo de fundamentación filosófica que Russell había intentado después de 1906 ha derivado obsoleto porque creyó erróneamente que era posible encarar y resolver problemas filosóficos mediante el uso de recursos matemáticos. Habría que señalar al respecto que Russell, por una parte, nunca sostuvo que los problemas filosóficos se resolverían lisa y llanamente mediante el mero uso de recursos matemáticos y, por otra parte, Russell exhibió (luego de 1906) que ciertos problemas de filosofía de la matemática podrían encararse más fructíferamente si se explicitaba la lógica presupuesta y se exhibía la ontología que esta lógica determinaba; así, al menos, la relación lógica-ontología y por añadidura matemática-ontología resultaba más clara y manejable. Véase I. Grattan-Guinness, "Russell's logical progress, some new light form manuscript sources", **Historia matemática** 2 (1975), pp. 489-493; consúltese cita textual de Putnam en p. 493.

34 R. Jager, **The development of B. Russell-Philosophy** (London: Allen and Unwin, 72), nota p. 86.

Crítica jurídica
Revista Latinoamericana de Política, Filosofía y Derecho

CONTENIDO DEL NUMERO 2

TEORIA

Unta teoría contractualista de la justicia
Salvatore Veca

Etica y poder
Bruno Accarino

Política, moral y justicia: ¿encuentro imposible?
Luis Cervantes J.

De la justicia en Marx: notas para una discusión
Francisco Galván D.

Notas acerca de Charles S. Peirce
Marco Cupolo

Socialización organizada y sistema político
Fernando Danel J.

ANALISIS

Ley general de salud y programas de vivienda
Guillermo Farfán

Precios diferenciales y Estado de bienestar en México
Guillermo Farfán

Lógica de lo virtual y estrategia del terror (Argentina 1976-1983)
Jorge A.García C.

TESTIMONIOS

La cultura, la honestidad y la rectitud al servicio de la justicia: El hombre clave, García Ramírez (Entrevista)
Cristina Pacheco

NOTICIAS Y BIBLIOGRAFIA

Teoría de la justicia, de J. Rawls
Luis Cervantes J.

Oportunidades vitales, de R. Dahrendorf
Francisco Galván D.

Sociología y pragmatismo, de C. W. Mills
Francisco Galván D.

Trabajo y praxis en El ser y el tiempo, de M. Heidegger, de J. Rodolfo Santander
Fernando Quintana

Información

Crítica jurídica es el órgano de Crítica Jurídica A.C., y es editada por la Unidad de Ciencias Políticas, Filosofía y Letras, Universidad Autónoma de Puebla, con la coparticipación de la Dirección de Extensión Universitaria de la Universidad Autónoma de Zacatecas. Suscripciones y correspondencia: Maximino Avila Camacho 229, 72000 Puebla, México. Tel. 42-2310.

CONTENIDO DEL NUMERO 3

Advertencia

TEORIA

Bodino y la teoría de la soberanía
Germán Pérez Fernández del Castillo

Política y razón
Luis Salazar Carreón

De lo político moderno: paradojas de la democracia
Francisco Galván Díaz

¿A pesar de todo. . . el socialismo como objetivo final?
Agnes Heller

La especificidad de la ciencia política
David Torres Mejía

ANALISIS

Autocrítica de la ciencia política latinoamericana
Wanderly dos Santos

La ciencia política en México: papel y desafíos
Carlos Sirvent

La ciencia política y el discurso político en México
Ricardo de la Peña

La profesionalización de la ciencia política en la FCPyS, UNAM
Jacqueline Peschard

El chancro y la policía
Julio Glockner

DOCUMENTOS Y TESTIMONIOS

Notas sobre el significado del estudio de la ciencia política
Jesús Reyes Heroles

La enseñanza de la ciencia política
Arnaldo Córdova

Notas sobre el Primer Congreso de Ciencia Política en México
César Cansino Ortiz

Sobre moral y policía, o la eficacia política de la ambigüedad
Roberto González-Villarreal

NOTICIAS Y HEMEROGRAFIA

Avances para una hemerografía sobre la ciencia política en México
César Cansino Ortiz y Eusebio Torres

¿A qué le teme Daniel Bell?
Alain Touraine

Los orígenes y fundamentos del poder político
Víctor M. Alarcón O.

Nota crítica metodológica a los análisis de Castaingts
Roberto González-Villarreal

Materiales recibidos
Julio César del Angel