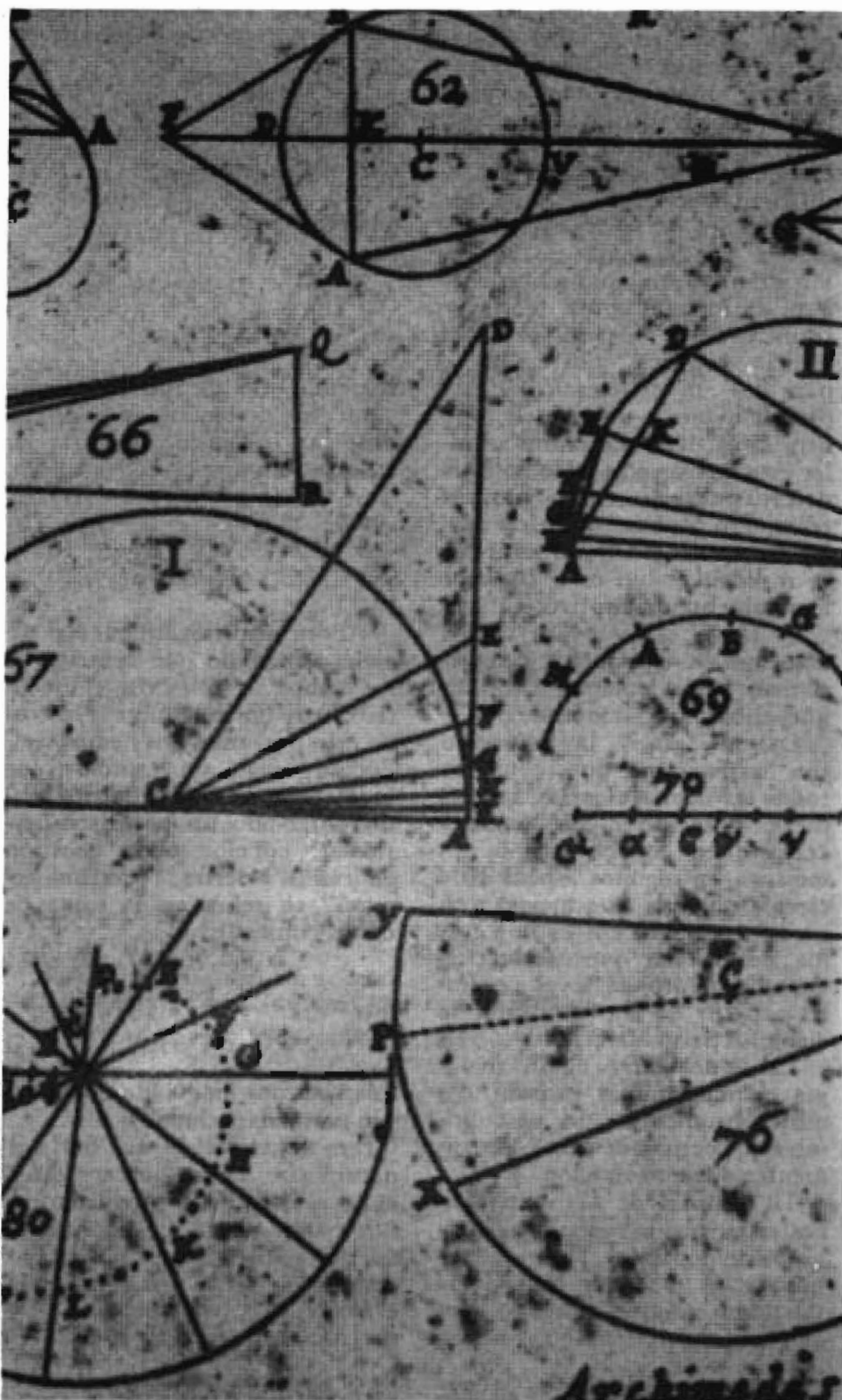


Aproximaciones a la matemática

Gerardo Alberto Garrido Natarén *



La matemática, como toda ciencia, es una disciplina que utiliza el método científico con la finalidad de hallar estructuras generales: leyes. Las primeras abstracciones matemáticas surgen lentamente en la antigüedad para expresar algunos términos numéricos simples y para algunas relaciones de forma. Actualmente, está constituida por varias disciplinas relacionadas íntimamente, las que prestan su ayuda ilimitada a las demás ciencias en la tarea de interpretar el mundo real.

1. Una de las características más notables es su abstracción, así, se llega al concepto de línea recta o número, sin importar los objetos que éstos puedan representar. En general, "el concepto de figura geométrica es el resultado de la abstracción de todas las prioridades de un objeto, exceptuadas su forma espacial y dimensiones".¹ Podríamos en este punto, intentar una aproximación: "la matemática es una ciencia que tiene como objeto las formas espaciales y las relaciones cuantitativas del mundo real".²

2. Otro rasgo característico de las matemáticas, es su sucesivo y creciente grado de abstracción.

Todo modelo matemático tiene su fuente en el estudio de fenómenos que acontecen en el mundo real o en problemas concretos de la misma matemática, sin embargo, a través de los pro-

* Escuela de Físico-Matemáticas, UAF. Avenida Universidad y avenida San Claudio, C. U., C. P. 72570, Puebla, Pue.

¹ A. D. Aleksandrov, A. N. Kolomogorov, M. A. Laurentiev y otros, *La matemática: su contenido, métodos y significado*, Alianza Universidad, 1950.

² Y. Jurgin, *¿Qué son las matemáticas?*, Ediciones de Cultura Popular, 1977.

gresivos grados de abstracción de un concepto matemático, podemos perder de vista el origen del concepto, por ejemplo, del concepto de número podemos pasar al concepto de espacio euclideo n-dimensional o infinito dimensional o del concepto de espacio métrico al concepto de espacio topológico. Estas abstracciones, apoyándose unas en otras, no nos ayudan a dar una prueba simple de que las matemáticas están fundamentadas en la experiencia. En general, el historiador matemático no encuentra dificultad en demostrar que el cálculo empezó como un método para medir áreas y volúmenes y por el contrario, relacionar el estudio de los espacios de Hilbert con el espacio habitual puede estar fuera de su alcance.

3. La matemática se mueve en el campo de los conceptos y sus interrelaciones.

Una de las primeras diferencias entre las ciencias es la que se presenta entre las ciencias formales y las ciencias factuales o empíricas, es decir, entre las que estudian ideas y las que estudian hechos. Por ejemplo: la lógica y la matemática son ciencias formales, la física y la biología se encuentran en cambio entre las ciencias factuales, se refieren a hechos que se supone ocurren en el mundo y consecuentemente recurren a la experiencia para contrastar sus fórmulas.

La lógica y/o la matemática se interesan por la estructura de las ideas factuales y formales, se puede decir que las ciencias formales son autosuficientes por lo que hace al contenido y al método de prueba, mientras que la ciencia factual depende del hecho, por lo que hace al contenido o significación y del hecho experimental para su verificación. Esto explica por qué puede conseguirse verdad formal completa, mientras que la verdad factual resulta tan huidiza.

Las técnicas científicas se clasifican en conceptuales y empíricas; dentro de las conceptuales, podemos incluir aquellas que permiten enunciar de un modo preciso problemas y conjeturas de algún tipo, así como los proce-

dimientos para deducir consecuencias a partir de las hipótesis y para comprobar si la hipótesis propuesta resuelve los problemas correspondientes. La matemática suministra el conjunto más rico de tácticas para enunciar problemas e hipótesis de un modo preciso, para deducir consecuencias a partir de los supuestos y para someter las soluciones a prueba o confrontación, pero no da ayuda alguna en la tarea de hallar problemas o imaginar el núcleo de hipótesis nuevas para las ciencias empíricas. Aparte de eso, en las ciencias más atrasadas nuestras ideas no son aún lo suficientemente claras para ser susceptibles de traducción matemática. Por lo demás no hay limitación de principio a la aplicación de los conceptos, teorías y técnicas de la matemática en la ciencia empírica.³ Sin embargo, para que un matemático pueda prestar ayuda a un científico de otra rama, le es necesario asimilar esta nueva rama, sólo después de esto podremos esperar el planteamiento de los modelos adecuados que ayuden a interpretar la realidad en un nivel superior al puramente descriptivo.

4. Hasta el momento hemos mencionado tres rasgos característicos de las matemáticas, bosquejemos ahora su método:

La analogía y la inducción son herramientas que, como en todas las demás ciencias, se emplean a menudo. La analogía consiste en concluir, de la semejanza en algunos aspectos de ciertos objetos, su semejanza en otros. La inducción es una forma de razonar que conduce al descubrimiento de leyes generales a partir de la observación de ejemplos particulares.

La importancia de la analogía e inducción es enorme, como instrumentos de descubrimiento, pero no como instrumentos de demostración.

La historia de las matemáticas está llena de ejemplos de progresos importantes, llevados a cabo gracias al uso de la analogía y/o inducción, sin embargo, ningún teorema pertenece definitivamente

a la matemática hasta que no ha sido rigurosamente demostrado. Esto distingue esencialmente a las matemáticas de otras ciencias: su alto grado de rigor lógico.

Para demostrar un teorema se requiere que éste sea deducido lógicamente a partir de las propiedades fundamentales, de los conceptos, relaciones y axiomas de aquella rama matemática a la cual pertenece el teorema en cuestión.

5. Para ilustrar el uso de la analogía e inducción en la etapa de descubrir leyes generales recurramos a un ejemplo.⁴

Supongamos que casualmente observamos que:

$$1 + 8 + 27 + 64 = 100$$

haciendo uso de nuestros conocimientos matemáticos podemos observar lo mismo bajo la siguiente forma:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2$$

Ahora nos preguntamos si sucede a menudo que la suma de los cubos de números consecutivos sea un cuadrado. Planteada esta pregunta, nos hemos conducido como un estudioso de las ciencias naturales que habiendo observado un hecho en particular, concibe una "cuestión general". Nuestra "cuestión general" se refiere a la suma de cubos consecutivos

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$$

a la cual nos ha guiado el "ejemplo particular" donde $n = 4$.

Para contestar, lo que haría el naturalista sería buscar otros casos particulares y enlistarlos. Por ejemplo para $n = 2, 3, 4, 5$; además para presentar un trabajo completo y uniforme incluiría el caso $n = 1$, tenemos:

³ Mario Bunge, *La investigación científica*, Ariel, 1969.

⁴ G. Polya, *Cómo plantear y resolver problemas*, Ed. Trillas, 1979.

$$\begin{aligned}
 1^3 &= 1 &= 1 &= 1^2 \\
 1^3 + 2^3 &= 1 + 8 &= 9 &= 3^2 \\
 1^3 + 2^3 + 3^3 &= 1 + 8 + 27 &= 36 &= 6^2 \\
 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 &= 1 + 8 + 27 + 64 &= 100 &= 10^2 \\
 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 &= 1 + 8 + 27 + 64 + 125 &= 225 &= 15^2
 \end{aligned}$$

El hecho que estas diversas sumas de cubos de números consecutivos sean cuadrados, difícilmente puede atribuirse al azar, el naturalista no tendría duda alguna sobre la exactitud de la ley general que le han sugerido los casos particulares observados por él. Esta ley general "está casi probada por inducción".

El matemático es más cauto y ante la misma situación se limitará a decir que la inducción sugiere tentativamente el siguiente teorema:

"La suma de los N primeros cubos es un cuadrado".

Una vez establecida la ley, el naturalista se le presentan dos opciones, seguir acumulando pruebas experimentales, por

ejemplo para $n = 6, 7, \dots$ o bien, reexaminar los hechos que le han llevado a formular su hipótesis, los comparará con cuidado, tratando de observar alguna regularidad más profunda, una analogía.

Si examinamos en esta los casos para $n = 1, 2, 3, 4, 5$, se presentan las siguientes preguntas:

¿Por qué incluso las sumas resultan ser cuadrados? ¿Qué podemos decir de dichos cuadrados? Sus raíces cuadradas son 1, 3, 6, 10, 15. ¿Qué podemos decir de dichas raíces? ¿Existe entre ellas una analogía más honda? La diferencia entre dos términos sucesivos aumenta con una regularidad notable:

$$\begin{aligned}
 3 - 1 &= 2 \\
 6 - 3 &= 3 \\
 10 - 6 &= 4 \\
 15 - 10 &= 5
 \end{aligned}$$

Constataremos entonces una analogía sorprendente entre las

raíces cuadradas de esos cuadrados:

$$\begin{aligned}
 1 &= 1 \\
 3 &= 1 + 2 \\
 6 &= 1 + 2 + 3 \\
 10 &= 1 + 2 + 3 + 4 \\
 15 &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5
 \end{aligned}$$

Si esta regularidad es general, el teorema cuya existencia ha-

bíamos sospechado, reviste una forma más precisa:

Para $n = 1, 2, 3, \dots$ se cumple

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$$

No es difícil ver que⁵

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{para } n=1, 2, 3, \dots$$

⁵ Este resultado puede demostrarse usando inducción matemática.

siglo



revista mensual de información y análisis de los principales problemas políticos, científicos y culturales, nacionales e internacionales

un año (12 números)
Distrito Federal e interior de la República...
Estados Unidos, Canadá y Latinoamérica...
Europa, Asia y África...

\$ 6,000.00
40 US Dólares
50 US Dólares

Esparza Ocho No. 144-108
col. Guadalupe Inn
CP 01020
México, D.F.





ISSN 0187-4713

Boletín de la Sociedad Mexicana de Física

número 1, abril de 1987

CONTENIDO

| | |
|--|----|
| Presentación, ... M.A. Pérez Angón | 1 |
| La enseñanza de posgrado y la investigación científica en el Departamento de Física del IOUAP, ... H. Navarro y A. Pérez | 3 |
| Editorial, ... Rubén Barrera | 8 |
| Informe de la Mesa Directiva 1985-86 | 10 |
| Actividades de la SMF | 13 |
| Noticias de la Comunidad | 15 |
| Correo | 16 |
| Convocatoria para Reunión General | 17 |
| Convocatoria para las Medallas Académicas de la SMF | 17 |
| Convocatoria para el Concurso Nacional "Newton" | 17 |
| Convocatoria del XXX Congreso Nacional de la SMF | 18 |
| Resolución Sobre La Paz | 20 |

El *Boletín de la Sociedad Mexicana de Física* es una publicación cuatrimestral de la Sociedad Mexicana de Física, A.C., Apdo. Postal 70-542, Coyoacán, 04510 México, D.F. Director: Miguel Ángel Pérez Angón. Registros en trámite. Impreso en Impresora Técnica Moderna, S.A., Chabacano 65, México, D.F.

Se autoriza la reproducción parcial o total del material publicado en este *Boletín*; sólo pedimos citar la fuente: Bol. Soc. Mex. Fís. Los artículos firmados son responsabilidad de los autores. El *Boletín* se distribuye gratuitamente a los socios de la SMF. El costo de la suscripción anual al *Boletín* es de \$1,000.00 para personas que no sean socios de la SMF y de \$2,000.00 para bibliotecas.

Usando esto último, el resto obtenido por inducción, se expresa como sigue:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

Para $n = 1, 2, 3, \dots$ se cumple

6. Hasta este punto, llegará probablemente el trabajo del naturalista, sin embargo, para que este resultado pueda ser considerado un logro matemático, tenemos que confirmar nuestro resultado mediante una demostración rigurosa, por lo tanto, al matemático ahora se le presenta un "problema de demostración". Para esto recurre a los diversos métodos

de demostración que conoce; la experiencia le indica que en este caso deberá intentar una demostración por inducción matemática y utilizará el "principio de inducción matemática" que se enuncia de la siguiente forma:

Si $P(n)$ es una proposición que tiene sentido para $n = 1, 2, 3, \dots$ de tal forma que se cumple:

- 1) $P(1)$ es verdadera
- 2) Si $P(n)$ es verdadera entonces $P(n + 1)$ es verdadera para cualquier n .

Entonces la proposición $P(n)$ es verdadera para $n = 1, 2, 3, \dots$

Este principio es lógicamente equivalente a otro aparentemente más inofensivo llamado "principio del buen orden" que dice: "Cualquier subconjunto no vacío del conjunto de los números naturales $\{N\}$ ⁶ posee un primer elemento." La equivalencia antes mencio-

nada, nos dice que los dos principios son verdaderos o los dos son falsos, y puesto que el segundo principio es fácilmente aceptable, habremos aceptado la "validez" del principio de inducción matemática; apliquemos este último al problema que tratamos de demostrar:

Para $n = 1, 2, 3, \dots$ se cumple

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

En este caso, la proposición $P(n)$ significa

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

y trataremos de establecer la verdad de $P(n)$ para $n = 1, 2, 3, \dots$

Para probar esto último utilizando el principio de inducción matemática, debemos verificar que $P(1)$ es verdadera

⁶ $N = \{1, 2, 3, \dots\}$

$$P(1) : 1^3 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2} \right)^2$$

Lo cual es evidente.

Posteriormente, suponemos que:

$$P(n): 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

es verdadera y de esto trataremos de deducir la verdad de $P(n+1)$; si sumamos $(n+1)^3$ a ambos miembros de $P(n)$ obtenemos la siguiente proposición verdadera

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 + (n+1)^3$$

Efectuando operaciones sobre el miembro del lado derecho obtenemos:

$$\left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 + (n+1)^3 = (n+1)^2 \left[\frac{n^2}{2^2} + (n+1) \right] =$$

$$\frac{(n+1)^2}{2^2} (n^2 + 4n + 4) = \frac{(n+1)^2 (n+2)^2}{2^2} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)^2$$

de lo cual concluimos que:

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)^2$$

pero esta es precisamente la proposición $P(n+1)$. Resumiendo:

a) Hemos verificado que la proposición $P(1)$ es verdadera.

b) De la suposición que $P(n)$

es verdadera hemos probado que $P(n+1)$ es verdadera.

Así que por el principio de inducción matemática, la proposición $P(n)$ es válida para $n=1, 2, 3, \dots$ es decir, hemos demostrado que para $n=1, 2, 3, \dots$ se cumple;

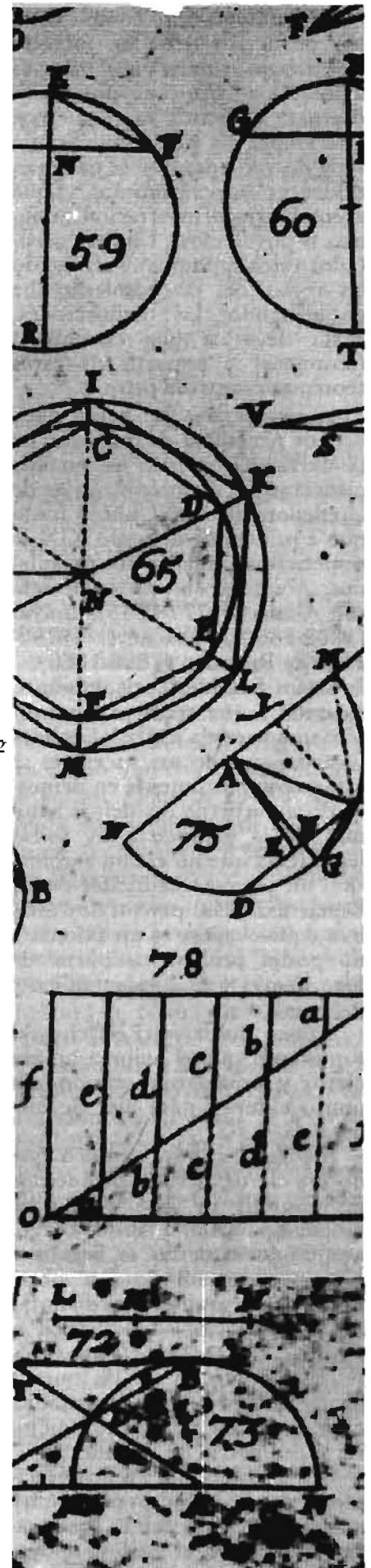
$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

Por inducción hemos obtenido la ley así formulada (en 5) y la hemos demostrado (en 6) haciendo uso de la inducción matemática.

Numerosos resultados matemáticos se han obtenido primero por inducción y solamente

después se han demostrado por algún método.

7. "Las matemáticas en gestación son una ciencia experimental, inductiva. Pero las matemáticas presentadas en rigor son una ciencia sistemática deductiva."



La matemática como sistema deductivo tiene un método de trabajo similar al "método axiomático" utilizado por Euclides para construir su geometría, éste empezaba por enunciar una serie de verdades que le parecían evidentes por sí mismas y que aceptaba sin demostración (axiomas o postulados). Una vez aceptados estos supuestos y siguiendo las reglas del razonamiento iba encadenando las deducciones, hasta llegar a una conclusión (teoremas) y a partir de estos teoremas construía otros.

La geometría que había nacido por necesidad de medición de la tierra se convirtió así en una ciencia que resistió el paso de alrededor de 2000 años, hasta que a principios del siglo XIX se sometieron a análisis sus postulados. A este problema se dedicaron Gauss (1777-1855), Bolyai (1802-1860), Lobachevski (1792-1866) y Riemann (1826-1866).

Según Euclides "por un punto exterior a una recta pasa una y sólo una paralela a ella". Euclides y centenares de sus sucesores se esforzaron inútilmente en demostrarlo a partir de los demás axiomas de la geometría. A todos les parecía que no era un axioma, sino un teorema deducible de los demás axiomas, pero todos estaban equivocados, es un axioma y no podía probarse a partir de los demás, es independiente del resto.

Gauss, Bolyai y Lobachevski supusieron que el axioma no era cierto y postularon que por un punto exterior pasa más de una paralela.

Riemann supuso también que no era cierto, pero se inclinó por la hipótesis de que no pasara ninguna paralela. Y sin embargo, aceptando esto, no se llegaba a ninguna contradicción, se obtenían otras geometrías distintas de la euclídea: hiperbólica y elíptica. No tardó en demostrarse que si alguna de las nuevas geometrías presentaba contradicción, también sería contradictoria la geometría de Euclides.

Este estudio que en un principio se presentó en un plano muy abstracto resultó ser la base matemática sobre la cual se apoya-

ron a principios del siglo XX las investigaciones del espacio físico real y que culminaron con la famosa teoría de la relatividad de Albert Einstein.

Muchas disciplinas matemáticas se han desarrollado debido a las necesidades de las propias matemáticas, en particular como consecuencia del método axiomático utilizado, pero más tarde han resultado ser muy útiles en la física y las ciencias naturales.

En particular la lógica matemática, cuyo surgimiento se debe a la necesidad de construir las matemáticas sobre una base sólida y que no fuese contradictoria en el sentido lógico, hoy sirve como aparato para crear la teoría de las computadoras digitales.

El desarrollo posterior de las teorías algebraicas y la determinación de estrechas relaciones entre el álgebra y el análisis matemático han conducido en los últimos años a obtener más resultados del llamado análisis funcional, el cual ha sido definido como el aparato matemático de la física moderna.

Estos son sólo algunos ejemplos de cómo una teoría matemática va desarrollándose a partir de sus postulados o axiomas y se convierte en un entramado de complejas deducciones que en muchos casos van a servir a la misma matemática y en otros, nos ayudan a crear nuevos modelos que interpreten o den solución a problemas concretos, no

necesariamente cercanos a la fuente física de nuestra teoría. En este sentido terminaré citando al matemático universal J. V. Newman que insiste en que el matemático no pierda de vista su relación con el mundo físico:

Podríamos decir que las matemáticas se originan en lo empírico, aunque la genealogía sea a veces larga y oscura, pero una vez concebidas, el asunto comienza a vivir una vida peculiar propia y es mejor compararla a lo creativo, gobernada por motivos casi enteramente estéticos, que a cualquier otra cosa, en particular a una ciencia empírica.

Sin embargo, cuando una disciplina matemática se aparta mucho de su fuente empírica, o más aún, si está durante una segunda o una tercera generación inspirada sólo indirectamente por las ideas que proceden de la realidad, está amenazada por peligros muy graves, se vuelve más y más esteticismo puro, se vuelve más y más un arte por el arte; pero esto no es necesariamente malo si el campo está rodeado de materias relacionadas, las cuales todavía tienen conexiones empíricas próximas o si la disciplina está bajo el criterio de hombres con un criterio extraordinariamente bien desarrollado. Pero existe el grave peligro que la materia sea desarrollada a lo largo de la línea de mínima resistencia, que la corriente, tan alejada de su origen quede separada en multitud de ramas insignificantes y que la disciplina se convierta en una masa desorganizada de detalles y complejidades.

En otras palabras, a gran distancia de su origen empírico o después de muchas reproducciones abstractas un tema matemático está en peligro de degeneración.

