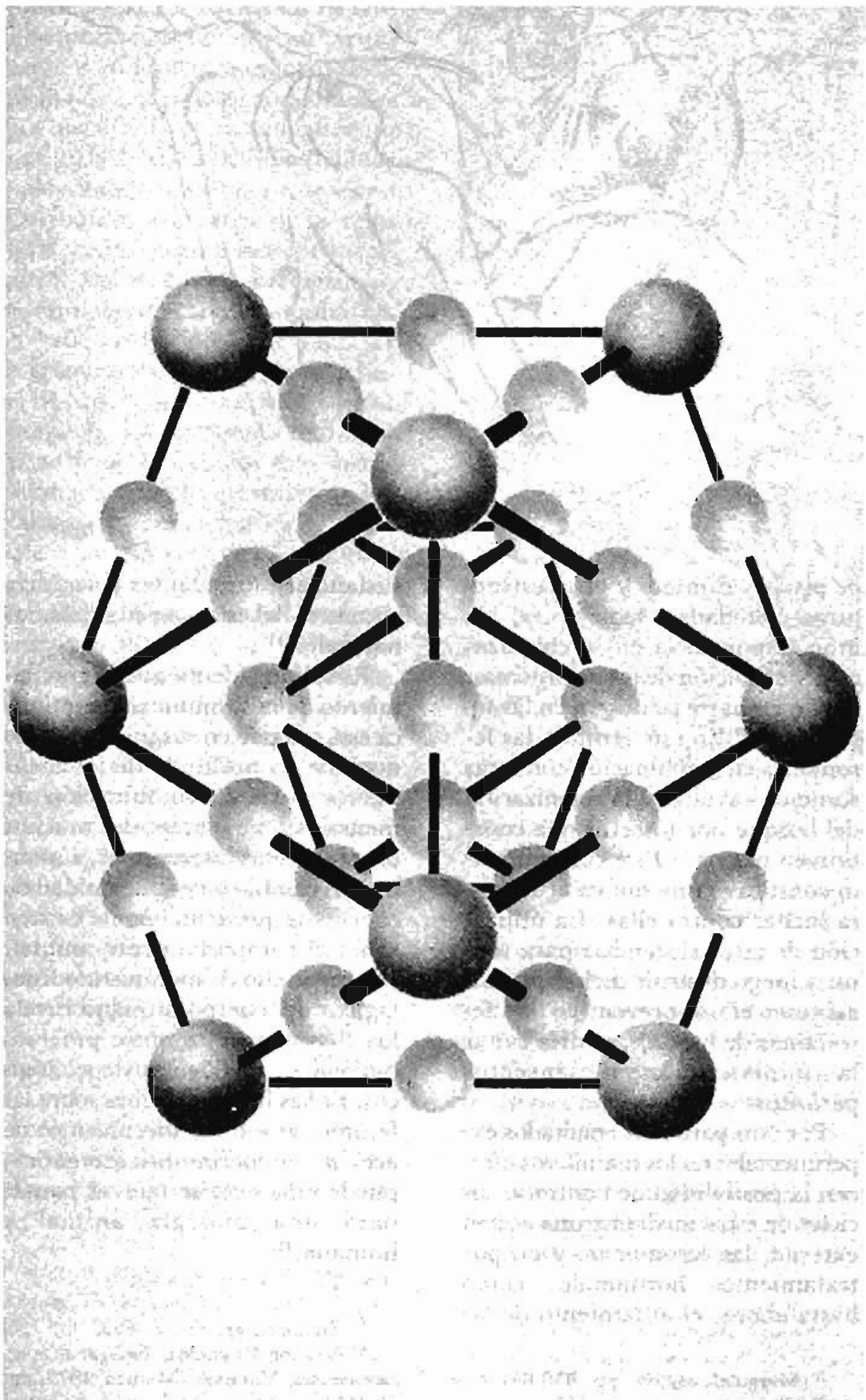
Existencia de conjuntos
supuestos en las construcciones formales



Roberto Caso Bercht*

Principio de formación de los conjuntos

La paradoja de Russell mostró, de una vez para siempre, que el principio tradicional de formación de conjuntos era insostenible. La creencia natural de que si se da *cualquier* condición de membresía entonces *existe*, de hecho, el conjunto correspondiente, es el origen de contradicciones y, en cuanto tal, algo a evitar cuando se buscan los fundamentos de una teoría.

Hay un amplio acuerdo entre los lógicos de que el regreso a una visión intuitiva ingenua es imposible: la intuición lógica tradicional quedó desechada debido a las antinomias. Pero, por otra parte, el hecho de que no haya un conjunto que consista de todos aquellos objetos que satisfacen una condición aparentemente bien delimitada, no es menos repugnante al sentido común que una manifiesta contradicción.[1] Cada esquema básico propuesto resultará "no natural", puesto que el único natural es el no restringido que las antinomias lógicas desautorizaron.

Lo que las paradojas han revelado son conflictos en nuestras intuiciones lógicas. En consecuencia, uno deberá analizarlas y emprender una reconstrucción sistemática de la lógica. El que las antinomias ocasionan una crisis en el pensamiento es evidente. La contradicción se genera al aceptar

* Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa.

[1] Véase Fraenkel/Bar-Hillel, 1958, p. 6.

elementos núm. 12, año 3, vol. 2; impreso en México.

ciertas pautas tácitas y confiables de razonamiento que, entonces, debemos hacer explícitas a fin de revisarlas. Pero cualquier corrección resultará *artificial*, porque hemos de apartarnos de lógicas, intuiciones naturales establecidas. Como dice Quine, una antinomia "leva consigo una sorpresa que sólo puede ser resuelta mediante el repudio de una parte de nuestra herencia conceptual".*

La tarea consistirá en buscar supuestos óptimos consistentes para la existencia de conjuntos, una vez que el principio no restringido *sobre*-comprehensivo no esté ya a la mano. Esta situación determina los varios tratamientos alternativos para la reconstrucción de la teoría, que difieren entre ellos en términos de aquella condición de membresía en la cual cada uno garantiza, o no, la existencia de conjuntos. Un criterio para la validez de tal correspondencia no resulta obvio en absoluto. No podemos eliminar cada condición de membresía que genera contradicciones, digamos la no auto-membresía, y luego asignar conjuntos a las restantes. Primero, no hay un procedimiento para hacer tal cosa. Segundo, uno puede tener "buenas" condiciones de membresía a las cuales están asociados conjuntos y, sin embargo, llegar a "malos" resultados cuando consideramos a todos esos conjuntos a la vez.

En el caso de Russell, la idea central fue conservar, al máximo posible, el atractivo principio de formación. Así en *Principia mathematica*, dada cualquier condición *significativa*, existe un conjunto cuyos miembros son exactamente aquellos objetos que satisfacen la condición. Pero la Teoría de los Tipos introduce una restricción al establecer cuáles condiciones son significativas y qué otras carecen de sentido.[2] Y este intento de solución al problema original da lugar a otros nuevos.

Tratamiento axiomático de los conjuntos

La existencia de conjuntos, vía el tratamiento axiomático, parece presentar una limitación intrínseca que debiera preocupar a filósofos y matemáticos por igual: frente a la caracterización axiomática uno se pregunta si los axiomas en turno no restringen el concepto de conjunto más de lo deseable, sin ofrecer un adecuado apresamiento de nuestras nociones básicas. La crítica respecto a este criterio de existencia vale lo mismo para el sistema de Zermelo-Fraenkel que para la alternativa Von Neumann-Bernays u otras. El problema de preguntarse por nuevos sistemas axiomáticos que caractericen más precisamente la noción de conjunto es no sólo significativo sino incluso imperativo. Como dice Gödel, pueden existir otros axiomas, hoy en día desconocidos para nosotros, "que un entendimiento más profundo de los conceptos subyacentes a la lógica y a la matemática nos permitiría reconocer como implicados por estos conceptos".[3] Por desgracia parece que nadie, incluido Gödel, ha tenido éxito aun en imaginar la dirección en que tales axiomas han de ser buscados.

El método axiomático resulta ser particularmente importante en las teorías de los conjuntos, más fundamental que en muchas ramas de la matemática. Esto es así en razón al fracaso del llamado método genético en la teoría tradicional. Si algo caracteriza al tratamiento cantoriano es su naturalidad. Por un lado, hay conjuntos y, por otro, nuestro poder de abstracción, estableciéndose una teoría donde cada paso es visto como el apropiado y natural. Algo como esto no puede hallarse en la posición axiomática, ni siquiera como idea regulativa, en contraste con la alternativa russelliana donde aún es un requisito que la solución sea "inherentemente" razonable y creíble "en consonancia con el sentido común".[4] La definición "natural" cantoriana y su método definitorio de abstracción, difícilmente pueden ser considerados como satisfactorios desde un punto de vista lógico y matemático. A fin de alcanzar requerimientos de rigor, se ofrece una solución diferente, terminando con una definición "no natural" donde la existencia de los conjuntos está determinada por un sistema de axiomas particular.

Uno da un valor apropiado a una definición mostrando la existencia de al menos un objeto que es cubierto por ella, ya sea dando un ejemplo efectivo o bien probando que hay objetos que la satisfacen, y que no hay más de un tal objeto. Así, por ejemplo, puesto que no es posible "exhibir" conjuntos, digamos, con cardinalidades arbitrariamente grandes, se postula una teoría axiomática a fin de garantizar su existencia como objetos propios de la investigación matemática. "Qué conjuntos existen", dice Abraham A. Fraenkel, "es una pregunta bien definida, a ser contestada por cuenta de sistemas de axioma adecuados sobre los cuales la teoría de los conjuntos está basada".[5] El que tal pregunta esté bien definida *dentro* de cierta estructura pudiera parecer una ganancia, en particular, con respecto a la noción intuitiva en Cantor, pero, por otra parte, nos enfrentamos a teorías diferentes, e incluso contrarias, donde la pregunta está bien definida pero obtiene diferentes respuestas, con la consiguiente

* Quine, 1966, p. 11.

[2] Véase Whitehead/Russell, 1967.

[3] Citado en Fraenkel/Bar-Hillel, 1958, p. 93.

[4] Ver los comentarios en Barker, 1964, pp. 86-89.

[5] Fraenkel, 1961, p. 222.

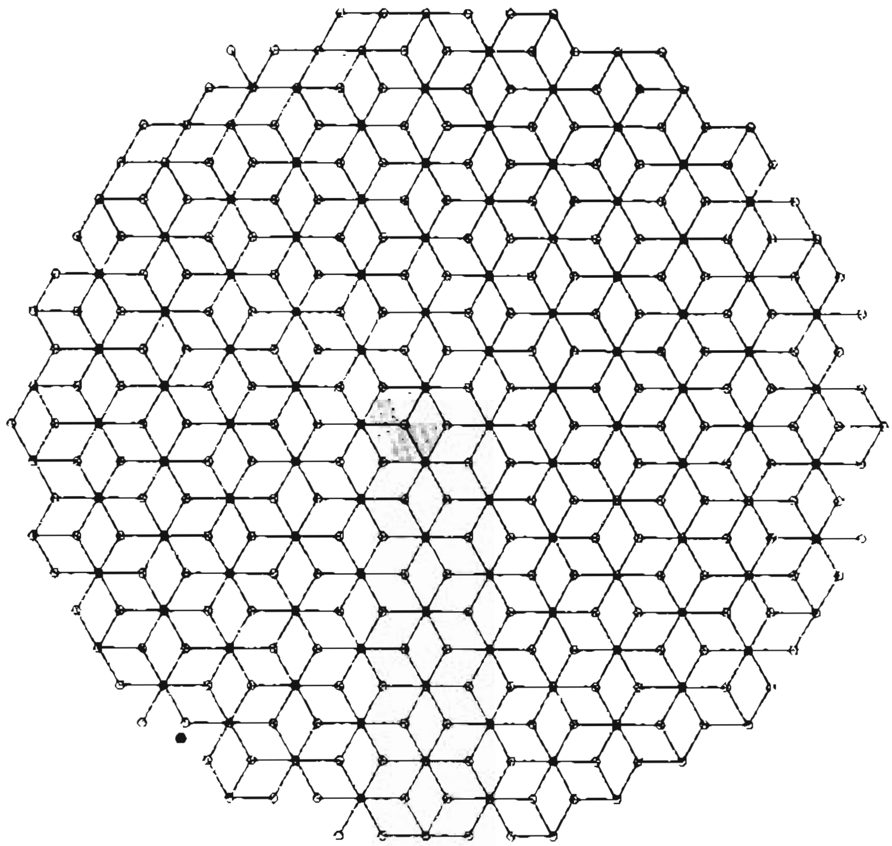
diferencia respecto a sus compromisos ontológicos según el sistema en el cual se exprese. Más aún la interrogante asociada "qué son estos conjuntos que existen" no obtiene contestación, considerándosele de no interés o incluso sin sentido, si bien se halla presente, de una manera u otra, en la construcción e interpretación de tales sistemas.

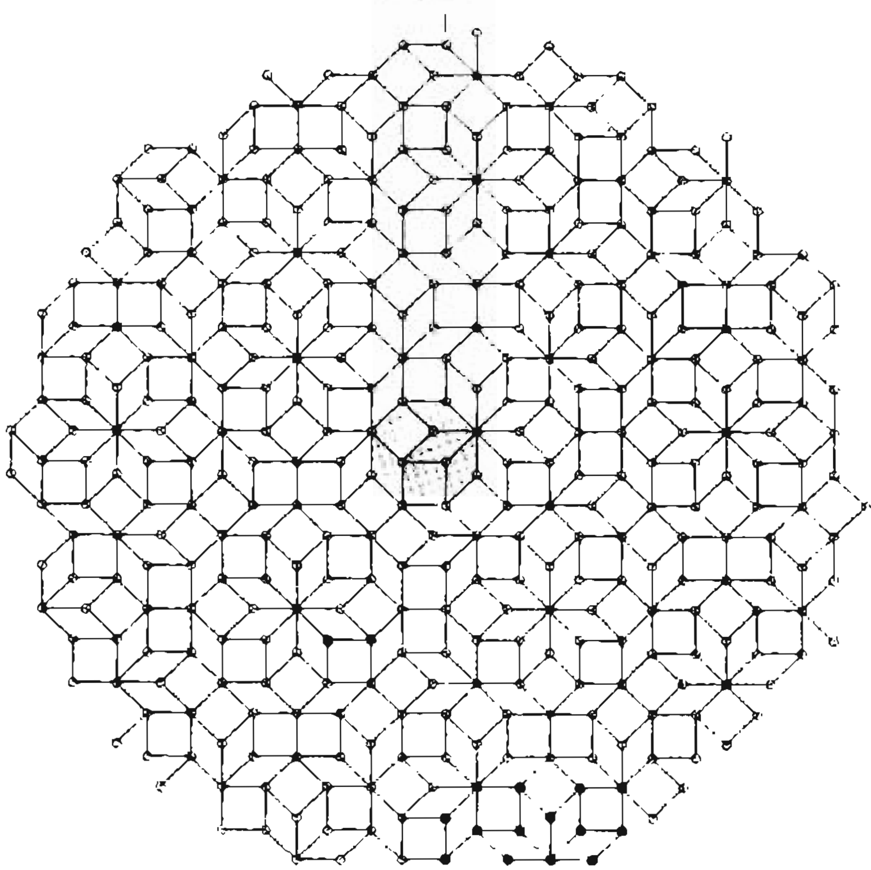
Una instancia, a la vez que ilustración de este problema, puede encontrarse en la distinción entre clases y conjuntos. Hay una falta de interés para entrar en la controversia sobre "el carácter lógico" de los objetos llamados "conjuntos" o "clases", con base en que la posición que se tome no influye en la teoría matemática de los conjuntos; de la misma manera como la aritmética se presenta como independiente de las varias teorías lógicas (y psicológicas) que versan sobre la naturaleza de los números.[6] Esta postura parece ser común a la tarea matemática. Sin embargo, aun cuando pareciera no haber interés en la naturaleza de los conjuntos y las clases, pensamos que un supuesto tácito está ya implicado respecto a la naturaleza lógica y ontológica de tales "entidades". El criterio que se usa para justificar la ignorancia de tales preguntas "filosóficas" apunta, con claridad, al papel subordinado que juega la teoría de los conjuntos en relación con la práctica matemática, como nos interesa demostrar.

Presuposiciones en la noción axiomática de los conjuntos

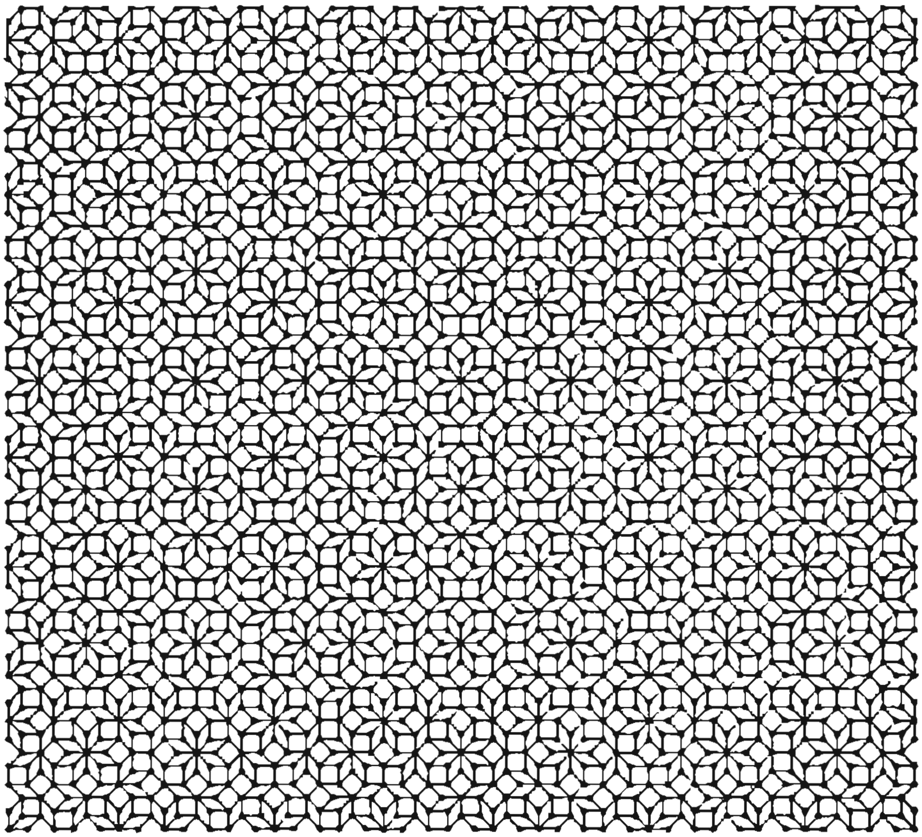
Se dice que los conjuntos son "clases seguras, confortables", mientras que las clases propias son pensadas como "colecciones monstruosamente grandes" a las que se les impide ser conjuntos a fin de evitar las paradojas conocidas.[7]

[6] Véase Fraenkel, 1961, p. 12.
[7] Cf. Mendelson, 1966, p. 160.





Mas lo que sean las clases es tan intuitivo y vago como la vieja noción de conjunto de Cantor. Algunas interpretaciones dirán que las clases son totalidades que corresponden a alguna propiedad, pero no necesariamente a todas las propiedades, y encontramos tanta imprecisión, la que uno quisiese, estas nociones de “totalidades”, “propiedades” y otras parecidas. Del “mundo” de todas las propiedades, algunas son separadas, a saber, “aquellas propiedades que *realmente* determinan clases”, produciéndose la especificación por los axiomas del momento y no teniéndose otro criterio que el de “proveernos de las clases que necesitamos en matemáticas”.[8]



Pero pensamos que hay algo más implicado aquí, amén de tales vaguedades. En la distinción entre clases como conjuntos y clases propias, hay también una diferencia ontológica. En palabras de Bernays “la distinción puede pensarse en el sentido de que un conjunto es una multitud que forma una cosa propia, en tanto una clase es un predicado considerado solamente con respecto a su extinción”.[9] Algunas “cosas” parecen ser más *cosa* que otras. Una jerarquía ontológica no puede evitarse en esta forma de hablar. En vena similar, se dice que las clases deberían concebirse como “elementos ideales”, en el sentido de Hilbert, *en oposición* a los conjuntos como “objetos matemáticos reales”.[10]

Cuando consideramos que las teorías de los conjuntos del tipo Von Neumann-Bernays son una respuesta ante la caracterización restringida de los conjuntos de Zermelo-Fraenkel, mediante el expander el universo de los conjuntos por aceptar, estamos quizás perdiendo el auténtico motivo para la introducción de clases (propias). La ontología de estas dos teorías parece ser prácticamente la misma, como pudiera sugerirlo el hecho de que ambas tienen la misma fuerza en cuanto teorías. La motivación para introducir la diferencia mencionada debe encontrarse más bien con respecto al principio no-restringido de formación de conjuntos, a saber: el hecho de que el principio de comprehensión fue asumido por Cantor sin la menor duda, puede interpretarse como diciendo que tal principio expresa un *aspecto fundamental* del pensamiento matemático y, como tal, que vale la pena de preservar en el desarrollo axiomático de los conjuntos. Zermelo pudo abstenerse de usar el principio al introducir una forma debilitada del mismo en su axioma de subconjuntos. Pero la operación tradicional que asigna a toda función proposicional en conjunto de objetos que la satisfacen siguió apareciendo como un rasgo valioso del discurso matemático ordinario, como un medio de considerar la extensión de un predicado en tanto entidad matemática individual.[11] Von Neumann habría sido capaz de preservar tal rasgo al implementar el compromiso de negar *status pleno* de “entidad matemática” al resultado de la operación y, sin embargo a la vez, admitiendo tal construcción como una “entidad ideal” limitada dentro de su sistema, a fin de evitar las paradojas producidas por el principio no restringido cantoriano.

Que hay problemas básicos respecto a la noción axiomática de conjuntos se muestra, en particular, el tratamiento correspondiente de la noción de subconjunto — de hecho, el principio no restringido de formación de conjuntos puede también verse como un prin-

[8] *Ibidem* (el subrayado es nuestro).

[9] Citado en Fraenkel/Bar-Hillel, 1958, p. 110, núm. 2.

[10] Ver la carta de Cantor a Dedekind en Van Heijenoort, 1967, p. 113.

[11] Cf. Rotman/Kneebone, 1968, pp. 63s.

cipio inconsistente de formación de *sub*-conjuntos. Una vez más: preguntarse qué subconjuntos existen es "una cuestión bien definida" en los sistemas axiomáticos, desatendiéndose los aspectos lógico y ontológico del caso y viéndose en la matemática el criterio último de su construcción. Pero, en la teoría de Zermelo, al obtenerse aquellos subconjuntos, de un conjunto dado, especificados por un predicado definido, uno se pregunta *si no hay otros* subconjuntos que no se hayan conseguido de esa manera. El problema puede parafrasearse como sigue: ¿el desarrollo de la teoría de los conjuntos, como la estructura básica de la matemática, requiere concebir y admitir otros subconjuntos aparte de los ya asegurados por el uso del axioma de especificación? Si la respuesta es afirmativa, como de hecho lo es, uno empieza a "concebir" y admitir nuevos subconjuntos *vía* nuevos axiomas. Tal es el caso del axioma de elección: algunos subconjuntos *útiles* no pueden obtenerse por "comprehensión" y deben ser garantizados por "elección". Pero incluso este proceso, no importa cuántos nuevos axiomas introduzcamos en nuestro sistema, no resuelve la dificultad: se mantiene la pregunta de si no habrá otros subconjuntos que nuestro sistema enriquecido no pueda proporcionar.

Entonces, pudiera ser el caso que uno requiriera conocer qué son un conjunto y un subconjunto a fin de construir una teoría más satisfactoria. Quizás sea el tiempo para una caracterización de más alcance de tales nociones que la ofrecida por el enfoque axiomático actual. Como sabemos, una alternativa diferente fue adelantada por Russell, donde los conjuntos fueron considerados no como *entidades primarias* con las cuales debemos tratar, sino como *construcciones* en una superestructura basada en nociones lógicas más fundamentales.[12] Al decir esto, no estamos postulando el logicismo como solución, sino sólo apuntando a una opción dada históricamente en la que se contempló la necesidad y exigencia de análisis más amplios de la noción de conjunto, más allá de su pretendido carácter primitivo. De hecho, incluso representantes distinguidos de la tradición axiomática han formulado la urgencia de un análisis de la noción de subconjunto. Tanto Bernays como Fraenkel, por ejemplo, llegaron a pensar que "dar solución al problema del continuo posiblemente requiera una caracterización de más alcance del concepto de subconjunto que la obtenida por el Axioma de Subconjuntos y de Elección" y "uno no puede esperar determinar el *número* de los subconjuntos de cierto conjunto antes de que se precise sin ambigüedades *qué cosas son*".[13]

Parecemos estar hoy día ante la necesidad de un reinicio en presencia de una filosofía, igualmente nueva, de los conjuntos. Resulta común enfrentar los enfoques de Russell y de Zermelo diciendo que el primero representó "una teoría de alto alcance, de gran significado para la lógica e incluso para la ontología" mientras que el segundo fue "una respuesta inmediata ante las necesidades apremiantes del matemático profesional".[14] La distinción, sin dejar de ser válida, resultará engañosa si se empieza por considerar a uno "más filosófico" que el otro. Pensamos que hay una buena cantidad de filosofía, tácitamente o no, en ambos tratamientos de los conjuntos, y que la única cosa "mala" de ello es la falta de aceptación respecto a la presencia de supuestos filosóficos y su manera de influir en el desarrollo de las teorías.

[12] *Ibid.*, p. 57

[13] Bernays/Fraenkel, 1958, p. 26 Cf. Fraenkel/Bar-Hillel, 1958, pp. 93s.

[14] Van Heijenoort, 1967, p. 59.

Otras presuposiciones

Cuando uno define subconjuntos por comprehensión, digamos en el sistema de Zermelo—fraenkel, sucede que uno habla más de una "construcción" del objeto requerido, a saber, el subconjunto. Esto no está muy lejos del hecho de aceptar que tanto la lógica como la matemática no inventan sus objetos, sino que los descubren dentro y en términos de un universo preexistente. Parafraseando una oración de Russell, uno podría decir que la teoría de los conjuntos debe ser descubierta justo en el mismo sentido en que se dice que Colón descubrió las Indias Occidentales y que creamos conjuntos tanto como él *creó* a los indios.[15] Esta posición de realismo platónico, en una forma más o menos atenuada, puede verse en el problema considerado anteriormente.

Por otra parte, Cantor fue criticado de psicologismo debido a su método de abstracción. Pensamos que un término más adecuado sería el de "idealismo", debiéndose su actitud, quizá, al fuerte entrenamiento escolástico que tuvo, como fue asimismo el caso de su predecesor Bolzano. Dando cualquier agregado M, Cantor considera que su número cardinal ^{M} (la notación hace referencia al doble acto de abstracción) es "un agregado definido compuesto de unidades" y que tal entidad "tiene *existencia en nuestra mente* como una imagen o proyección intelectual" del agregado M en cuestión.[16]

Aquellas "unidades" fueron abstraídas de la naturaleza de todos y cada uno de los elementos de M. Pero tal "imagen intelectual" es algo más que una imagen psicológica, poseyendo un *status* ontológico por sí misma. Esto resulta evidente en la crítica de Cantor al *Grundzuege der Geometrie* de Veronese, cuando acusa a este matemático de operar con "números pseudo-transfinitos, y les adscribe propiedades que no pueden poseer simplemente porque ellos mismos, *en la forma imaginada por él*, no tienen existencia excepto en el papel".[17] Es claro que el compromiso aquí es algo más que la existencia de una imagen psicológica. En relación a este punto, el avance hecho por Frege en la aritmética teórica de números finitos y transfinitos, con su definición puramente lógica del concepto de número, es importante tanto por la falta de referencia a actividades mentales como porque no hay necesidad de asumir la existencia de nuevos entes no definidos llamados "números", ya que estas construcciones se hacen a partir de la lógica. Dicho entre paréntesis, Cantor no fue consistente con su práctica de la virtud matemática de evitar equivocidad en los términos introducidos en la teoría. En el caso de tipos ordinales en agregados finitos y los correspondientes números cardinales ambos son denotados por los mismos signos, si bien son conceptualmente diferentes unos de otros.[18]

Cuando lógicos matemáticos como Kuratowski y Mostowski apuntan que la axiomatización de la teoría de los conjuntos "aún no ha alcanzado su forma más perfecta",[19] la noción de "caracterización" de los conjuntos, más que la correspondiente de "construcción" de los mismos, parece estar una vez más presente y, con ello, un platonismo de los conjuntos. Tal supuesto se halla implicado, creemos, en su discusión de los diferentes papeles que los axiomas juegan en las teorías matemáticas. Primero esta el caso de cuando los axiomas "caracterizan por completo la teoría" puesto que ellos son en algún sentido una definición de las nociones primitivas de la misma. Hay entonces una construcción acabada, siendo un ejemplo de esto la teoría de grupos. Segundo, cuando los axiomas formalizan "sólo ciertas propiedades elegidas de las nociones primitivas de la teoría". Esto sucede en la teoría de los conjuntos, donde "el propósito de los axiomas no es dar una descripción de las nociones primitivas, sino más bien ofrecer una sistematización del concepto intuitivo".[20]

Tal distinción establece dos varas diferentes para medir. Algunas nociones advendrían a una especie de *fiat* axiomático, como en el caso de un grupo definido como un conjunto y unas operaciones, satisfaciendo los axiomas de la teoría de los grupos. Por otra parte, habría ciertas "nociones intuitivas" que no podemos axiomatizar completamente, como en el caso de los conjuntos. Pero alguien podría decir que *su intuición* de lo que es un grupo no ha sido completamente caracterizada porque, digamos, su intuición reclama la existencia de algunos elementos que la teoría del campo, mas no la del grupo, caracteriza como inversos multiplicativos. Para tal persona la teoría de los grupos no habría alcanzado "su forma más perfecta". A la inversa, uno podría considerar una teoría restringida de los conjuntos, digamos, la correspondiente a las operaciones booleanas, como una caracterización completa de una teoría.

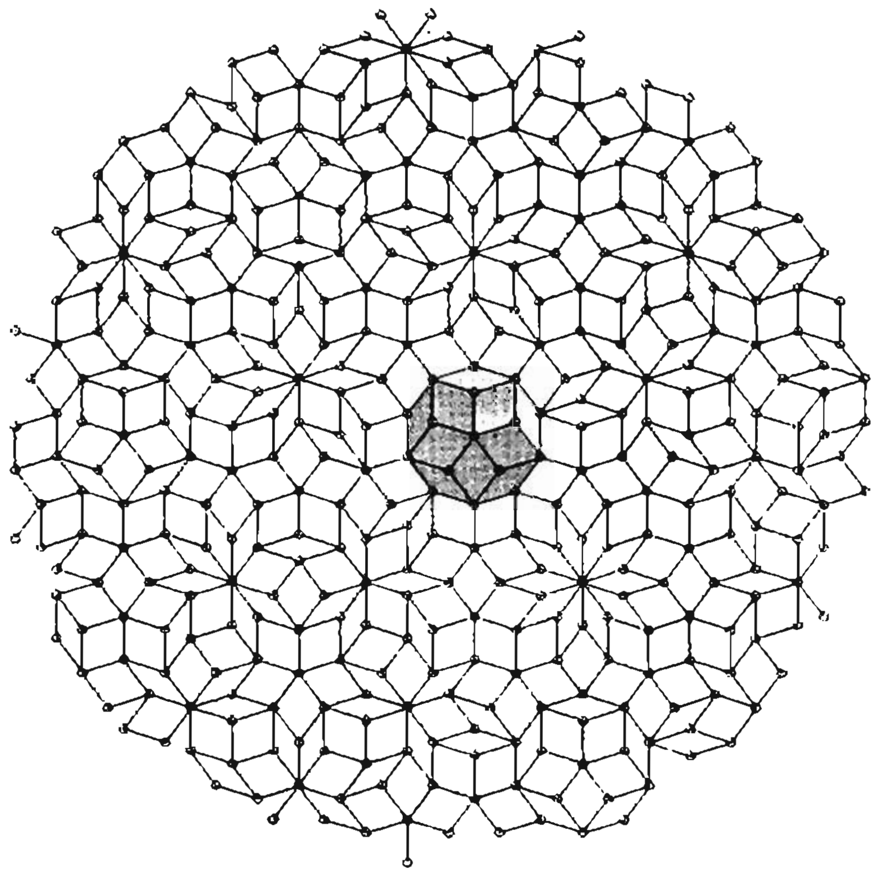
Resulta revelador, a este respecto que el problema filosófico de establecer la "verdad intuitiva" de los axiomas aparezca tan sólo en conexión con el segundo caso. Cuando ciertos axiomas pretenden caracterizar una noción intuitiva de los conjuntos, podemos preguntar hasta qué punto tienen éxito en

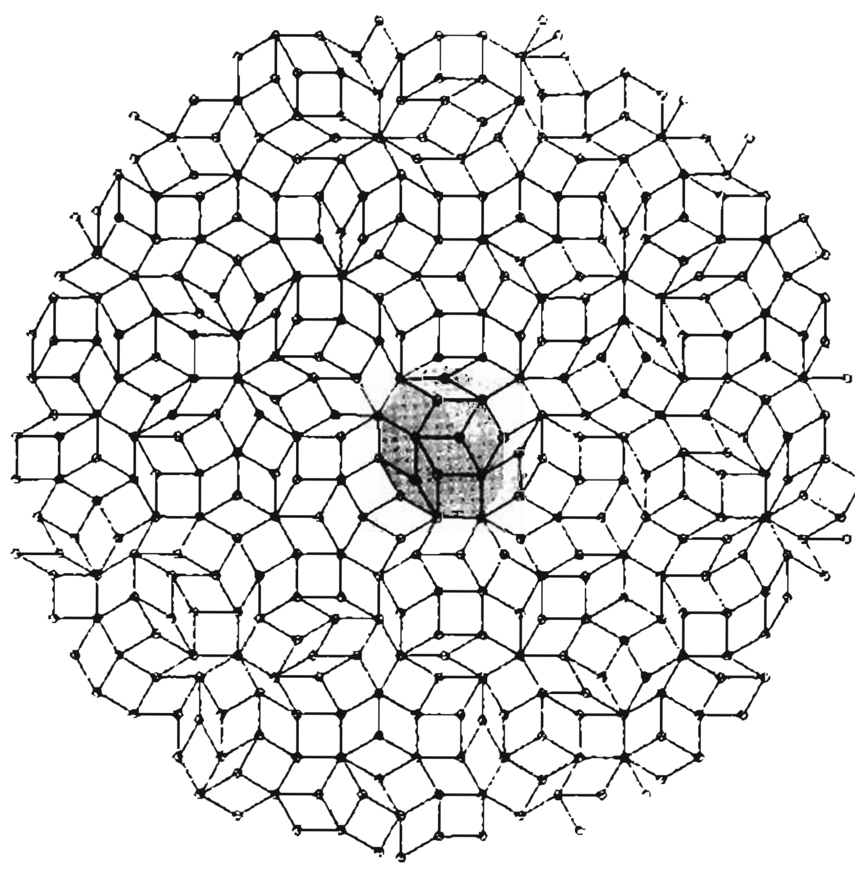
[15] Russell, 1901, p. 312.
[16] Cantor, s/f., p. 86 (el subrayado es nuestro).
[17] *Ibid.*, p. 218 (el subrayado es nuestro).
[18] *Ibid.*, p. 113.
[19] Kuratowski/Mostowski, 1968, p. 58.
[20] *Ibid.*, p. 56.

ello. El criterio es aquí demasiado vago, si es que hay alguno, y parece que de una manera u otra está implicando un supuesto sobre cierta *clase de realidad* de los conjuntos a la cual la intuición remite. En forma por demás explícita, Gödel afirma que los axiomas de la teoría de los conjuntos "describen una realidad bien determinada".[21] No comparte el punto de vista de que la teoría de los conjuntos no sea más que una teoría hipotética que matemáticos y lógicos encuentran interesante de estudiar y analizar. Para la concepción platonista de Gödel, el enunciado, digamos, del axioma de elección tiene un carácter categórico más bien que hipotético; de hecho, todo enunciado sobre conjuntos sería verdadero o falso, y la indecidibilidad de cualquier enunciado, por ejemplo, la conjetura de Cantor, sólo significaría que los sistemas de la teoría "hasta donde son conocidos hoy en día" no contienen "una descripción completa de esa realidad".[22]

Es un hecho que no todo mundo en el área de la matemática está de acuerdo con esa tesis. Pero en el rechazo uno debe buscar las correspondientes presuposiciones filosóficas: la diferencia puede rastrearse hasta su origen como una discrepancia entre filosofías asumidas. El punto aquí es que las proposiciones extramatemáticas, incluso no aceptadas como existiendo, determinan la construcción y práctica real de la matemática. Una cosa sorprendente es que el que esta controversia de si las concepciones matemáticas son inventadas o descubiertas, esto es, si son nuestra creación o más bien poseen una existencia independiente por sí misma, es tan vívida hoy en día como en los tiempos de Cantor y Kronecker.

Hay otro tipo de distinción res-

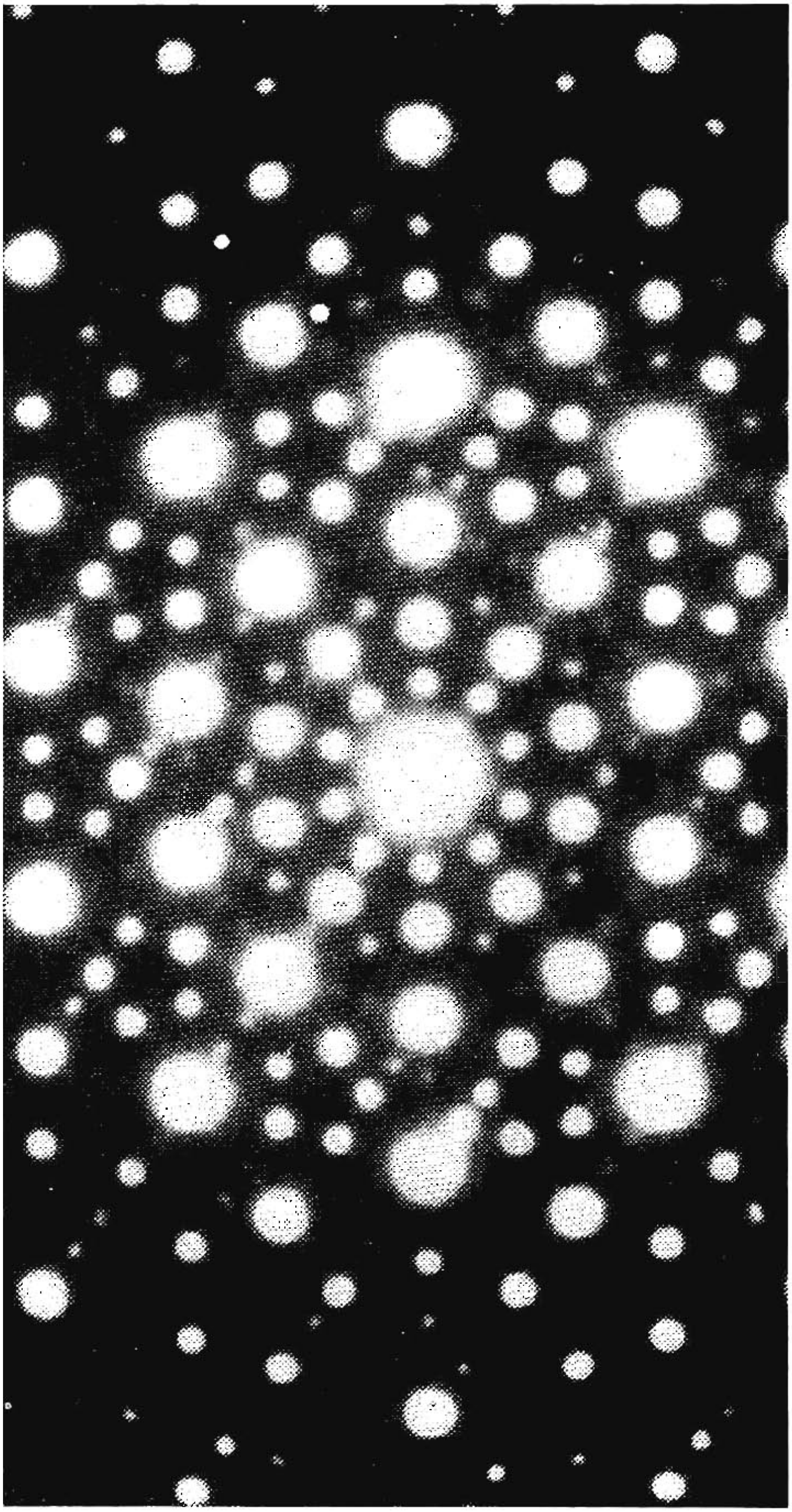




[21] Gödel, 1947, pp. 515-525.
[22] *Ibid.*

pecto a los axiomas que pudiera aclarar algunos de los presupuestos implicados en la noción de conjunto. Tiene que ver con cierta clase de logicismo. Resulta que entre los axiomas de una teoría, algunos son considerados más importantes o fundamentales, poseyendo una naturaleza *más* lógica que los otros. Así, el principio de buen orden es llamado por Cantor "una ley lógica fundamental de gran consecuencia, digna de atención por su validez universal".[23] Fraenkel llega incluso a decir que ese principio "tiene no sólo una naturaleza matemática, sino también una lógica y quizás aun una naturaleza epistemológica";[24] de acuerdo con Hilbert, un principio lógico general que es necesario e indispensable ya para los primeros elementos de la inferencia matemática".[25] Algunos de los axiomas juegan, entonces, un importante papel lógico en el razonamiento matemático que los distingue de la puramente conjuntistas. Si alguien exige una justificación de tal diferencia, lo más que obtiene es un referirse a la intuición y los sentimientos; y así, uno debe sorprenderse de encontrar que no existe unanimidad entre los matemáticos respecto a la aceptación o rechazo de ciertos axiomas particulares. En el caso del axioma de regularidad, por ejemplo, aunque posee un gran poder simplificador y de acuerdo con Kuratowski y Mostowski este principio expresa una "propiedad de los conjuntos intuitivamente obvios",[26] que no puede derivarse de los otros axiomas, es rechazado por estos lógicos como uno de los axiomas de su sistema porque carece de la "plausibilidad inmediata" de los ya aceptados.[27]

[23] Citado en Fraenkel, 1961, p. 223.
[24] Fraenkel, 1966, p. 87.
[25] Citado en Fraenkel/Bar-Hillel, 1966, p. 87.
[26] Kuratowski/Mostowski, 1968, p. 156.
[27] *Ibidem*.



Uno puede preguntarse si esta segunda clasificación de los axiomas, en términos de nociones lógicas, posee una correlación no trivial con la anterior, dada en términos ontológicos. Pudiera no ser accidental que la tesis logicista fue creada y desarrollada por defensores del realismo como una filosofía de la matemática.

Por otra parte, parece que para alguien tan platónico como Gödel, la teoría de los conjuntos es más similar a la lógica, en el sentido de ser una especie de constituyente objetivo del razonamiento matemático mismo, que una teoría matemática puramente hipotética. Quizás estas dos visiones tienen más en común de lo que se acostumbra pensar. Como señalamiento de tal vínculo, está el tomar a la no contradicción como criterio decisivo de existencia matemática.

El caso del axioma de elección puede ilustrar, sin duda, lo que acabamos de apuntar. Dada la prueba de independencia de Cohen en 1963, la mayoría de los matemáticos profesionales que parecen compartir, tácitamente o no, una perspectiva ontológica realista, han aceptado el axioma como un principio básico y ortodoxo del razonamiento. De hecho, el que haya sido favorecido este axioma con respecto a varios principios equivalentes se basa en su "carácter lógico general" que no en una especie de evidencia superior.[28] Por otra parte, el axioma es puramente existencial, esto es, no afirma la posibilidad de construir un conjunto de elección; ésta es una característica que, como bien dice Fraenkel, "no se conforma con el reino de la aritmética pura o al rigor de la geometría en el sentido griego", pero tampoco guarda discrepancia con el espíritu de la matemática actual, si consideramos que "el análisis clásido moderno y, por lo tanto, la geometría tampoco tienen en general —en contraste con los matemáticos intuicionistas— ese carácter".[29] Uno se pregunta si este axioma caracteriza a algún subconjunto de un conjunto dado, o simplemente "construye" un conjunto en términos de un enunciado existencial. Para algunos matemáticos el problema pudiera ser irrelevante pero no para otros, especialmente para los platonistas. Con todos, aun entre aquéllos que aceptan el axioma, hay la costumbre de evitar su uso siempre que el axioma no sea requerido por la naturaleza del problema y esto se hace "por respeto a la pureza del método".[30]

En la aceptación o el rechazo del axioma de elección uno puede detectar la ausencia de un criterio lógico, tal como señalamos anteriormente, estando las posiciones más fuertes influenciadas por razones prácticas e incluso por emociones que por argumentos de principio. (Así, ha habido más razones psicológicas que lógicas implicadas en este asunto.) Se ha dicho que entre las dos partes en pugna jamás ha sido posible una polémica por no haber una *lógica común*, de manera que los lógicos y los matemáticos, por igual, no han podido hacer algo mejor que insultarse mutuamente.

Las consideraciones prácticas suenan como un criterio más pertinente. La versión para aceptar el axioma de elección encontró una mejor base cuando vino a ser obvio que el principal propósito conectado con el buen orden desde 1880, esto es, el fijar el lugar de la potencia del continuo en la serie de los *alephs*, no había adelantado lo más mínimo por el teorema del buen orden. El axioma de elección, debemos recordar, fue introducido originalmente por Zermelo para probar aquel teorema y, así, la comparabilidad entre números cardinales. Por otra parte, se ha necesitado el axioma para otros propósitos; en general, para garantizar la existencia de conjuntos que no pueden asegurarse de otra manera. La independencia del axioma y la prueba de que algunos teoremas matemáticos, de particular interés para el profesional, no pueden probarse sin su ayuda, fortalecieron una actitud ya presente en *Principia mathematica*, donde no se pregunta si un axioma es "verdadero" o "admisible", sino más bien qué partes adicionales de la matemática pueden obtenerse con su respaldo.

Sea como fuere, el origen del axioma de elección no es muy diferente de la historia de otros principios. Uno puede ver que el desarrollo de la matemática ha presentado dos rasgos principales: uno, la progresiva obtención de *nuevas conclusiones* de premisas previamente aceptadas; el otro, la adición de *nuevas premisas* a aquéllas ya elegidas, esto de acuerdo con las necesidades de la matemática (y de las ciencias). Esos nuevos principios fueron usados inconscientemente en el trabajo diario del matemático antes de que se hicieran patentes y alcanzaran aceptación. En forma similar, el axioma de elección se obtuvo por un método *a posteriori*, esto es, al examinar y "analizar lógicamente conceptos y métodos y pruebas que se hallan, de hecho, en la matemática y cuyo desarrollo original de tipo intuitivo se basaba más en fundamentos psicológicos que lógicos".[31] Tal examen puede o no llevar a un nuevo principio y, de ser ese el caso, entonces pensamos que la referencia a la "evidencia intuitiva o lógica" es irrelevante o al menos secundaria. El principal criterio en tal aceptación parece no ser otro que las necesidades

[28] Cf. Fraenkel/Bar-Hillel, 1958, p. 71.

[29] *Ibid.*, pp. 78s.

[30] *Ibid.*, p. 75.

[31] *Ibid.*, p. 79.

de la matemática de la ciencia. El papel de la primera en las teorías de los conjuntos resulta determinante en más de un sentido.

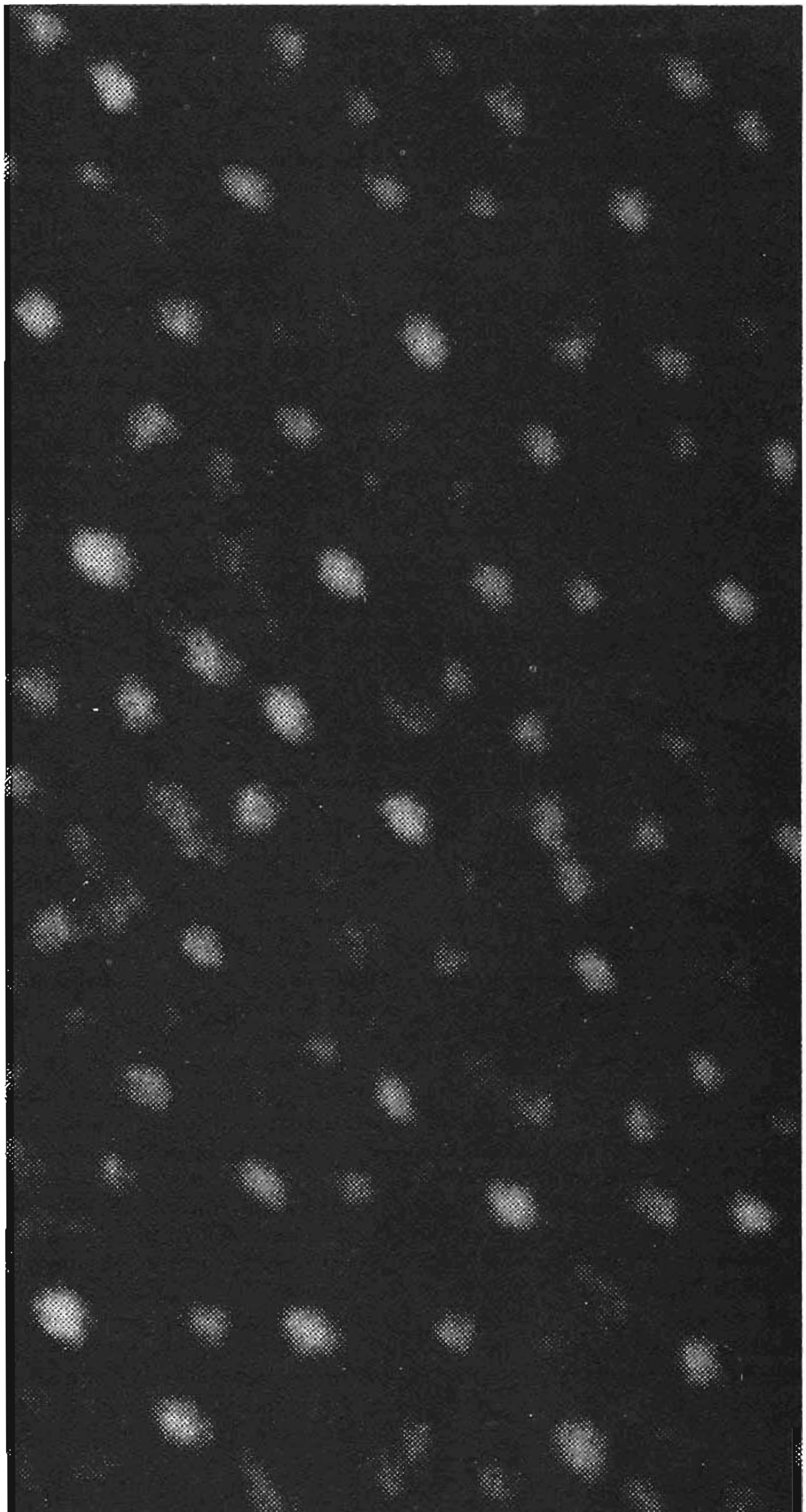
Teoría de los conjuntos y matemática

Mendelson expresa una actitud muy común entre los lógicos matemáticos cuando, al referirse a las distintas teorías de los conjuntos, afirma que la selección de una de ellas es "antes que nada una cuestión de gusto" y que "no hacemos ninguna demanda acerca del sistema que usaremos, excepto el que sea una base adecuada para la matemática contemporánea".[32]

Esta exigencia se hallaba ya presente desde los inicios mismos. Para Cantor, su teorema que corresponde al viejo problema del *continuo*, "debiera ser considerada la base misma de la teoría de los conjuntos".[33] Más aún, la motivación original de Cantor fue la de buscar una solución para ciertos problemas particulares en el análisis y él interpretó a la nueva teoría como una generalización de una parte de la matemática: "de hecho, la aventura es generalizar o continuar la serie de los enteros reales más allá del infinito".[34]

En el surgimiento de la toería axiomática de los conjuntos, como una respuesta a las antinomias, encontramos la misma actitud original hacia la matemática. El enfoque de Zermelo estuvo fundamentalmente motivado por las necesidades reales del matemático profesional. El carácter "bastante arbitrario" de los procedimientos que se siguieron para la elección de los axiomas de la teoría de Zermelo-Fraenkel, según el propio Fraenkel confiesa, "está más bien justificado por el desarrollo histó-

[32] Mendelson, 1966, p. 159.
[33] Cf. Fraenkel, 1961, p. 58.
[34] *Ibid.*, p. 3.



rico de la teoría de los conjuntos que por argumentos lógicos".[35] Este desarrollo histórico no es otro que el estructurado por la motivación primitiva matemática. Hoy en día vemos, por ejemplo, que la discusión de los conjuntos, en Bourbaki, también está escrita para el matemático profesional, siendo el interés establecer una teoría de los conjuntos segura "como el fundamento para un edificio unificado de la totalidad de la matemática pura".[36] El mismo espíritu se encuentra en casi cualquier libro o texto sobre teoría de los conjuntos. El texto de Monk busca · ~ una "introducción a toda la teoría de los conjuntos necesitada por la mayoría de los matemáticos", sobre la base que "la teoría de los conjuntos debe formar el fundamento lógico para toda la matemática". Cuánta teoría de los conjuntos necesita el matemático profesional y qué tan importante es esta disciplina para la matemática son, sin embargo, puntos debatibles. Como dice Halmos en su conocido texto, "todo matemático está de acuerdo que todo matemático debe conocer algo de teoría de los conjuntos; el desacuerdo comienza al tratar de decir cuánto es ese algo". Su propia respuesta no carece de ironía cuando dice: "si usted quiere ser un matemático, necesita algo, y aquí está; léalo, digiéralo y olvídelo".[38]

Aunque la conexión entre teoría de los conjuntos y matemática es evidente, la naturaleza e importancia de tal relación no es del todo clara. La mayoría de los lógicos ve a la teoría de los conjuntos como el *fundamento* de la matemática. Desafortunadamente tal caracterización es suficientemente vaga como para permitir varias interpretaciones. Algunos dirán que la teoría de los conjuntos aporta la base de la matemática en el sentido de un "*substratum*" o incluso una "*justificación*"; otros la considerarán como una fuente de métodos y directrices para desarrollos ulteriores; los más escépticos afirmarán que la teoría de los conjuntos reproduce a la matemática en el sentido de una traslación a otro lenguaje, pero sin beneficio subsiguiente para la matemática actual; aún otros verán en la teoría de los conjuntos simplemente una rama nueva de la matemática a ser desarrollada por ella misma, y así sucesivamente. Sea como fuere, muchos matemáticos consideran que preguntar hasta dónde puede usarse la teoría de los conjuntos como base o marco de referencia de la matemática es "un problema serio y profundo".[39] Esta actitud que pudiera llamarse lógica y fundamentalista puede encontrarse, por ejemplo, en el trabajo de Bernays, interesado esencialmente en el desarrollo formal mismo. De hecho, incluso en el tratamiento de Bourbaki las consideraciones de fundamento son centrales, al grado que la discusión general resulta más elaborada y "lógica" de lo que muchos matemáticos sentirían como necesario para sus requerimientos en el trabajo cotidiano.

Actualmente la matemática es vista como el estudio de estructuras abstractas. Muchos tipos de estructuras con variados grados de complejidad se estudian en sus distintas ramas. Para los lógicos, tales estructuras requieren de un soporte y así el principal papel de la teoría de los conjuntos sería proporcionar un *substratum universal*. Para ese propósito se postula un "universo de conjuntos" de manera que, dentro de ese universo, uno puede entonces construir matemáticamente sistemas de entidades, exhibiendo las estructuras matemáticas conocidas. Tal es el programa implementado, por ejemplo, con los axiomas de Zermelo-Fraenkel, que implícitamente definen un universo de conjuntos que busca ser lo suficientemente comprehensivo como para responder a los requerimientos de la matemática.

Es cierto que toda teoría matemática se ocupa de "objetos" de cierta clase y que un sistema de más alta generalidad, como la teoría de los conjuntos, debe asimismo basarse sobre algún dominio postulado de objetos, cuyas propiedades esenciales estén contenidas en los axiomas formales. Así, se dice que el universo de conjuntos al que la teoría de Zermelo-Fraenkel hace referencia, sirve *precisamente* como el universo de discurso postulado para un tipo particular de investigaciones abstractas y puede argumentarse que tal universo de conjuntos no pretende, en forma alguna, ser el modelo abstracto de uno real, existente. Que este problema no se halla resuelto lo sabemos, dado lo que dijimos antes sobre la "naturaleza" de los axiomas, esto es, si interpretamos los axiomas de la teoría como describiendo o caracterizando una realidad particular, o como simplemente proporcionando las reglas de lo que pudiera ser visto como un juego.

Se ha considerado como no accidental, que en el nacimiento de la teoría de los conjuntos, en 1833, se acuñó como mote el que la esencia de la matemática se hallaba en su *libertad*. De acuerdo con tal punto de vista, al organizarse como sistemas formales, la teoría de Zermelo-Fraenkel constituyó un juego diferente al de la teoría, digamos, intuicionista. Cualquiera de esos juegos reglados es, en cuanto tal, tan bueno como los otros y el preguntar cuál de ellos convendría elegir no tiene sentido, a me-

[35] Bernays/Fraenkel, 1958, p. 31.
[36] Rotman/Kneebone, pp. 129s.
[37] Monk, 1969, p. vii.
[38] Halmos, 1960, pp. vs.

[39] Fraenkel, 1961, p. 193. Véase los comentarios anteriores.

nos que empecemos por buscar algún otro criterio más allá de la pura formalización axiomática. Los matemáticos platonistas sostendrán que poseen el más natural y correcto entre tales criterios. Pero la presencia de diferentes e incluso contrarias teorías de los conjunto y la falta de una sólida base para poder decir que un criterio sea "más" verdadero que otro, hace poco sostenible esa pretensión contra lo que pudiera haberse pensado en un principio. ¿Cómo diría uno que está logrando "descubrimientos" acerca de una "realidad independiente" bajo tales circunstancias?

El requisito de que toda teoría de los conjuntos propuesta debe *reproducir* en la superestructura las leyes aceptadas de la matemática, pudiera adelantarse como el criterio deseado al elegir entre teorías intuitivamente indecibles. Pero éste no es el caso, porque si bien el requerimiento es útil como una guía parcial al idear una teoría de los conjuntos, es una *condición necesaria* en su construcción. Se requiere toda verdad de la teoría de los conjuntos, como es el caso de Quine, como "simplemente un vocabulario restringido que conviene" donde se formula un sistema general de axiomas para la matemática "así queden los conjuntos donde sea".[40]

El principio llamado de parsimonia, e incluso consideraciones más esteticistas, han jugado un papel en la construcción y aceptación de teorías. Y aunque es del todo cierto que algunos matemáticos se enorgullecen al describir su disciplina como una tarea puramente artística, la historia ha mostrado que tales actitudes no han sido determinantes, en lo esencial, en el desarrollo de la matemática, considerada en su totalidad.

En cualquier caso, nos hallamos en un punto similar al de un principio si vemos la matemática como el criterio buscado: permanece el problema, ahora en términos de diferentes e incluso contrarias teorías y concepciones matemáticas.

Parece razonable concluir que un criterio para la matemática sería un criterio para las teorías de los conjuntos, y no resulta muy aventurado buscarlo en el campo de las ciencias empíricas. Una razón para preferir uno de los sistemas formales de los que hemos venido hablando, pudiera ser que, a la postre, tenga aplicaciones en las ciencias con características de mayor confiabilidad y fecundidad. Nos parece que si la hipótesis generalizada del continuo encontrara un uso en alguna rama de la física, por ejemplo, cualquier teoría de los conjuntos en la cual no se contara con ella se consideraría como defectuosa e inapropiada.

Es verdad que las teorías de los conjuntos, lo mismo que la matemática, permiten e incluso motivan la construcción libre de bellas y sorprendentes estructuras, admirables por sí mismas. Pero es igualmente cierto que precisamente esta posibilidad ha conducido a bizantinismo infecundos en el pensamiento teórico que tuvieron que desaparecer porque el curso de la historia era otro. Las actitudes pragmáticas en la empresa científica han tenido la virtud, entre otras, de llamar la atención contra lo que pudiera ser descrito como un cáncer y una mitificación de la metodología pura.

[40] Quine, 1966, p. 34.

Bibliografía

[1] Barker, S.F., *Philosophy of Mathematics*. Prentice Hall, New Jersey, 1964.

[2] Bernays, P. y A. A. Fraenkel, *Axiomatic set theory*, North-Holland, Amsterdam 1958.

[3] Cantor, G., *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers*, Dover, s/t.

[4] Fraenkel, A. A. *Abstrac set theory*, North-Holland, Amsterdam, 1961.

[5] Fraenkel A. A., *Set theory an logic*, Addison-Wesley, 1966.

[6] Fraenkel, A. A. y. Bar-Hillel, *Foundations of set theory*, North-Holland, Amsterdam, 1958.

[7] Gödel, K., "What is Cantor's continuum problem", *American Mathematical Monthly*, vol. 54 (1947).

[8] Halmos, P. R., *Naive set theory*, Van Nostrand, New Jersey, 1960.

[9] Kuratowski, K. y A. Mostowski, *Set theory*, North-Holland, Amsterdam, 1968.

[10] Mendelson, E., *Introduction to mathematical logic*, Van Nostrand, New Jersey, 1966.

[11] Monk, J. D., *Introduction to set theory*, McGraw-Hill, New York, 1969.

[12] Quine, W. V., *The ways of paradox*, Random House, New York, 1966.

[13] Rotman, B. y G. T. Kneebone, *The theory of sets and transfinite numbers*, American Elsevier Publishing Company, New York, 1968.

[14] Russell, B., "Is position in space and time absolute or relative?", *Mind X* (1901).

[15] Van Heijenoort, J., *From Frege to Gödel*, Harvad University Press, Cambridge, 1967

[16] Van Heijenoort, J., "Logical paradoxex", *The Encyclopedia of Philosophy*, P. Edward ed., MacMillan and Free Press, New York, 1967a.

[17] Whitehead, A. N. y B. Russell, *Principia mathematica to *56*, Cambridge University Press, Cambridge, 1967.