

---

# DE FRACTALES Y DINÁMICA

Guillermo Sierra L.

Departamento de Matemáticas - ICUAP  
Universidad Autónoma de Puebla

*La línea más corta entre  
dos puntos es la curva barroca*

Carlos Fuentes

**E**n el siglo XVII, al estudiar Newton fenómenos físicos como la gravitación, descubrió que el cálculo diferencial era la herramienta matemática precisa para estudiarlos. Basándose en el cálculo diferencial pudo determinar con gran exactitud las órbitas de los planetas alrededor del Sol. Desde entonces el cálculo diferencial e integral ha sido utilizado para explicar gran cantidad de fenómenos.

Al mismo tiempo otros científicos como Euler, D'Alembert, Lagrange, Jacobi, Legendre, Hamilton y Fourier durante los siglos XVIII y XIX desarrollaron extensivamente las teorías del movimiento planetario, del calor y de los fluidos entre otras. Para ello usaron y contribuyeron significativamente a la teoría de ecuaciones diferenciales, que desde entonces ha estado estrechamente ligada con el desarrollo de la Física.

En la mayoría de los casos, las ecuaciones diferenciales que se encuentran en la práctica tienen una solución; sin embargo, encontrar ésta en forma exacta no es posible. Fue entonces que H. Poincaré a finales del siglo XIX se preguntó cómo obtener información de las soluciones de estas ecuaciones diferenciales sin tener la forma explícita de la solución, creando así el estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales que hoy se conoce como teoría de sistemas dinámicos, que no es otra cosa que las matemáticas del movimiento.

Dentro de esta rama de las matemáticas, y alrededor de 1960, empezaron a surgir de forma natural ciertos objetos

que hoy se conocen como fractales. Algunos de éstos eran ya conocidos por los topólogos desde principios de siglo, pero habían quedado relegados a mera curiosidad geométrica. Recientemente se ha visto que la existencia de fractales es casi un hecho general en los sistemas dinámicos.

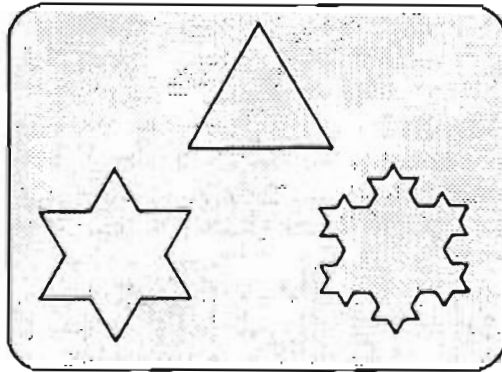
Los sistemas dinámicos constituyen hoy en día una fuente para el modelaje de fenómenos en muchas ramas de las ciencias como la biología, economía, química, ciencias sociales, etcétera. Contribuyen a responder preguntas tales como la forma en que se desarrollan las galaxias, cómo surgen y se desarrollan las especies o la manera en que se desarrolla la economía. Los fractales se han encontrado en muchos procesos como por ejemplo las turbulencias, los terremotos, el clima, la actividad cerebral, entre otros. Un hecho importante es que el avance de la computación ha ayudado a esclarecer muchos de estos fenómenos como veremos más adelante.

El estudio de los fractales y los sistemas dinámicos es reciente y su desarrollo es aún incipiente, aunque día a día se publican contribuciones que hacen que esta rama avance espectacularmente, además de que está estrechamente relacionada con casi todas las ramas de las matemáticas\*.

---

\*En la Universidad Autónoma de Puebla, diversos grupos de investigadores se dedican a estudiar estos aspectos de la dinámica y los fractales. Entre otros se encuentran los siguientes: Dr. Harold V. McIntosh, del Departamento de Aplicación de Microcomputadoras del ICUAP, sus estudiantes Aarón Cristobal y Gisela Varela (quienes amablemente me proporcionaron las gráficas de la Figura 10 obtenidas de sus programas) y el M. C. Julio Poisot, de la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas.

FIGURA 1



### Fractales, definición y ejemplos

Para definir un fractal tenemos que partir de un espacio base, el cual puede definirse dentro del conjunto de los números reales ( $\mathbb{R}$ ) con alguna dimensión específica ( $n$ ): el espacio de tres dimensiones, el espacio plano de dos dimensiones o una línea que tiene una dimensión. En estos espacios que son conocidos por los matemáticos como  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}$ , respectivamente, y sus generalizaciones a  $n$  dimensiones  $\mathbb{R}^n$ , es donde viven los fractales. También hay que considerar lo que llamaremos dimensión fractal y que denotaremos por  $d_f$  que está definida como sigue:

Para cualquier subconjunto  $X$  del espacio  $\mathbb{R}^n$  definamos la dimensión fractal de  $X$ ,  $d_f(X)$  como:

$$d_f(X) = - \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log n_X(\epsilon)}{\log \epsilon}$$

donde  $\epsilon$  es cualquier número real y  $n_X(\epsilon)$  es el mínimo número de esferas de radio menor o igual a  $\epsilon$  que es necesario para cubrir  $X$ .

Diremos que  $X$  es un fractal si el número  $d_f(X)$  asociado a  $X$  no es un número entero.

A continuación se describen algunos ejemplos para entender este proceso: consideremos primero un intervalo, que denotaremos por  $I$ , de longitud igual a uno. Si tomamos  $\epsilon = 1/2$  es fácil ver que  $n_I(1/2) = 2$  (es decir, dos esferas de radio

$\epsilon = 1/2$  cubren el intervalo de longitud igual a uno); si tomamos  $\epsilon = 1/4$ , entonces  $n_I(1/4) = 4$ ; en general si  $\epsilon = 1/k$  entonces  $n_I(1/k) = k$  de donde:

$$\frac{\log n_I(1/2)}{\log (1/2)} = \frac{\log 2}{-\log 2}, \quad \frac{\log n_I(1/4)}{\log (1/4)} = \frac{\log 4}{-\log 4}$$

$$\frac{\log n_I(1/k)}{\log (1/k)} = \frac{\log k}{-\log k}$$

y todos valen menos uno, así que  $d_f(I) = 1$ . Es fácil ver también que  $d_f(\mathbb{R}^2) = 2$  (donde  $\mathbb{R}^2$  es el plano) y que en general  $d_f(\mathbb{R}^n) = n$ , donde  $n$  es un número entero y por lo tanto estos espacios no son fractales.

El primer ejemplo fractal que apareció en ecuaciones diferenciales es debido a S. Smale<sup>1</sup>, quien al estudiar cierta ecuación diferencial encontró el llamado fenómeno de la herradura, de donde surgió el conjunto que los topólogos conocían anteriormente como Conjunto de Cantor y que se construye de la siguiente manera. Se comienza con un intervalo  $I$ , el cual se parte en tres partes iguales quitando el intervalo central, cada una de las partes restantes se divide en tres iguales, y se les quita la central y así sucesivamente.

El límite de este proceso es el Conjunto de Cantor y está constituido por un conjunto especial de puntos contenidos en el intervalo  $I$ . Para calcular su dimensión fractal: denotaremos  $C$  a dicho conjunto de Cantor y tomaremos para  $\epsilon$  los valores  $1/3, 1/3^2, \dots, 1/3^n$  sucesivamente, del primer paso para construir  $C$  se obtiene  $n_C(1/3) = 3 - 1 = 2$ , del segundo paso se obtiene que  $n_C(1/3^2) = 3^2 - 5 = 4 = 2^2$  y en general  $n_C(1/3^n) = 2^n$  de donde por la definición de dimensión fractal, resulta:

$$d_f(C) = - \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log 2^n}{\log (1/3^n)} = - \frac{n \log 2}{-n \log 3} = \frac{\log 2}{\log 3},$$

como el número

$$\frac{\log 2}{\log 3} = 0.6309$$

no es un número entero, entonces  $C$  es un conjunto fractal. Hay que observar que si al construir  $C$ , en lugar de quitar en cada proceso la tercera parte, quitamos la cuarta parte, obtendremos otro conjunto de Cantor homeomorfo al original pero con dimensión fractal distinta.

El siguiente ejemplo que veremos es el que se ha denominado como copo de nieve, que es un subconjunto del plano  $\mathbb{R}^2$  y que se construye recursivamente de la forma que se ilustra en la Figura 1.

Se comienza por un triángulo y cada lado se divide en tres segmentos, el segmento de la mitad se sustituye por un triángulo sin base donde la longitud de cada lado de este triángulo es igual a la tercera parte del lado del triángulo inicial y así sucesivamente. La figura límite es una curva que separa al plano en dos regiones, entre otras cosas se puede probar que el área de la región que encierra esta curva es finita pero su perímetro es de longitud infinita, esta curva es también el típico ejemplo de una curva continua pero que no es diferenciable en ningún punto. Para calcular su dimensión fractal denotaremos por  $N$  al copo de nieve, bastará analizar uno de los lados del triángulo inicial. Tomemos para  $\varepsilon$  la sucesión  $\varepsilon = 1/3, 1/3^2, \dots, 1/3^n$ , entonces del primer paso de la construcción de  $N$   $n_N(1/3) = 4$ , del segundo paso  $n_N(1/3^2) = 4^2$  y en general del  $n+1$  paso  $n_N(1/3^n) = 4^n$  de donde

$$d_f(N) = -\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{\log 4^n}{-\log(1/3^n)} = \frac{n \log 4}{n \log 3} = \frac{\log 4}{\log 3},$$

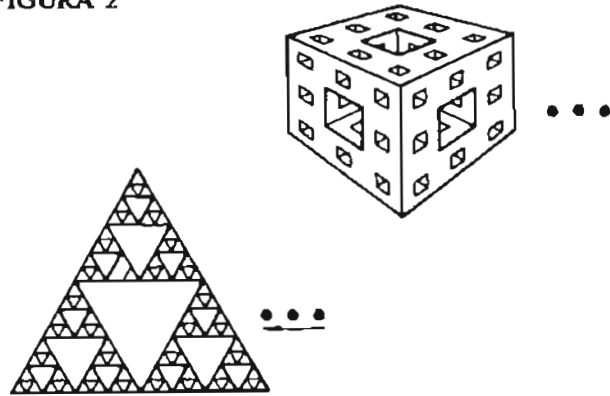
como el número

$$\frac{\log 4}{\log 3} = 1.2619,$$

no es un número entero entonces el copo de nieve es un fractal. Otros ejemplos de fractales conocidos anteriormente por los topólogos están representados aproximadamente en la Figura 2.

La definición de un fractal no es todavía definitiva porque todo depende de la forma en que la teoría y los experimentos avancen, pero hasta ahora esta

FIGURA 2



definición que hemos dado es la más adecuada porque el cálculo de las dimensiones fractales  $d_f$  es fácil de obtener cuando hay procesos recursivos como en los casos anteriores.

Existen en la literatura otras dimensiones fraccionarias como la dimensión de Hausdorff que también se usa para definir fractales, pero esta dimensión es más complicada de calcular; de cualquier forma hay relaciones muy estrechas entre invariantes del tipo dinámico con la dimensión fractal, y que refuerzan la aceptabilidad de esta definición.

Respecto a los fractales se han escrito algunos trabajos que destacan por su claridad, uno especialmente relevante es el hermoso libro de Mandelbrot titulado *La geometría fractal de la naturaleza*<sup>2</sup>.

### Sistemas dinámicos

Para explicar lo que se entiende por un sistema dinámico debemos escoger primero un espacio base que puede ser la Tierra, el Sol, el sistema planetario, una mesa, una esfera o el espacio  $n$ -dimensional; estos espacios base se llaman espacios topológicos y los denotaremos por  $B$ . A continuación debemos definir una función en este espacio base. Por ejemplo, puede ser un estanque con truchas, y la función sería el lugar que tienen éstas después de un cierto tiempo.

FIGURA 3



FIGURA 4.1

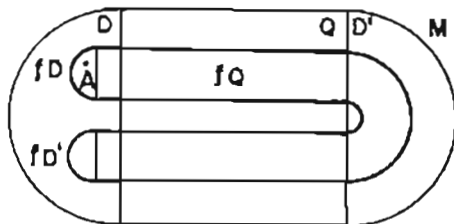
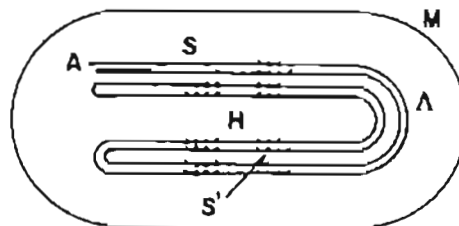


FIGURA 4.2



Esta función se denota por  $f: B \rightarrow B$ , lo que significa que a un punto cualquiera  $p$  en  $B$  se le asocia el punto  $f(p)$ . Como es posible reiterar este proceso, entonces al punto  $f(p)$  se le asocia el punto  $f(f(p))$  y así sucesivamente. Ello genera una órbita de  $p$ , que son los puntos  $p, f(p), f(f(p)), f(f(f(p))) \dots$ . Cada punto  $p$  de  $B$  tiene una órbita, y el estudio de estas órbitas es precisamente el sistema dinámico en  $B$ , debido a  $f$ .

Aunque estos ejemplos tienen como base nuestra experiencia física, todo esto se puede abstraer y generar en un sinfín de sistemas.

Las órbitas de un sistema dinámico se comportan de muy diversas formas. Puede suceder que una órbita consista de un sólo punto, esto es  $p=f(p)$ , estos puntos se llaman puntos fijos del sistema y por medio de la derivada de  $f$  se puede conocer lo que pasa a su alrededor. Hay otras órbitas que consisten de un número finito de puntos por lo que después de repetir el proceso un cierto número de veces se regresa a la posición inicial, y se llaman órbitas periódicas. Otras órbitas son cuasi-periódicas, es decir, que repitiendo el proceso los puntos se mueven cerca de una órbita periódica y hay órbitas donde los puntos viajan y son atraídos hacia otros conjuntos (véase la Figura 3).

Un conjunto del espacio  $B$  que resulta de sumo interés en dinámica, es el conjunto límite de órbitas bajo  $f$  y que denotaremos por  $\Lambda(f)$ . Este conjunto  $\Lambda(f)$  es invariante bajo  $f$ , o sea  $f(\Lambda(f)) = \Lambda(f)$  y por lo tanto la dinámica en  $B$  se restringe a una dinámica en  $\Lambda(f)$ .

Desde Poincaré se había pensado que el conjunto  $\Lambda(f)$  estaba constituido

por un número finito de órbitas hasta que S. Smale descubrió la siguiente función  $f$  (véase Figura 4), donde el espacio base es  $\mathbb{R}^2$  y  $f$  transforma un rectángulo primero aplastándolo verticalmente, alargándolo horizontalmente y luego doblándolo (como en la Figura 4.1). Por esto se llama mapeo en herradura. Para este mapeo el conjunto  $\Lambda$  es un conjunto de Cantor (véase Figura 4.2) y es un fractal. Los conjuntos  $\Lambda(f)$  son comúnmente llamados conjuntos atractores.

A partir de este ejemplo, y de algunos otros, se encontró que fenómenos como éste eran de lo más comunes, es decir que  $\Lambda(f)$  no está constituido por órbitas periódicas ni cuasi-periódicas, en estos  $\Lambda(f)$  se denomina atractor extraño y en general es un fractal. Un ejemplo de un atractor que es periódico se puede ver en la Figura 5.

Un atractor extraño puede ser construido de la siguiente manera: supongamos que  $B$ , el espacio base es como una "dona" llena y  $f: B \rightarrow B$  la función que tiene como imagen  $f(B)$ , una "dona" más delgada dentro de  $B$  y que además le da dos vueltas alrededor, como en la Figura 6, así que  $f(B)$  atraviesa cada disco transversal en dos pequeños discos. Similarmente  $f(f(B))$  es una "dona" más larga y más delgada que le da cuatro vueltas alrededor a  $B$ , e intersecta cada disco transversal en cuatro pequeños discos y así sucesivamente.

En el límite,  $\Lambda$  intersecta cada disco transversal en un conjunto de Cantor por lo que  $\Lambda$  es localmente el producto de un arco por un conjunto de Cantor. Globalmente es lo que los matemáticos llaman un haz sobre el círculo, y tiene la

forma de un solenoide, en este caso es un atractor extraño.

Hay atractores que permanecen aún bajo pequeñas perturbaciones de  $f$ . Smale probó que un atractor es estable si  $f$  separa los puntos en  $\Lambda$  exponencialmente y en una vecindad de  $\Lambda$ ,  $f$  tiene una dirección de contracción transversal. Estos atractores se denominan como hiperbólicos. Los ejemplos de la figura 4.1 y de la figura 6 son de este tipo. El hecho de que haya puntos que están muy cercanos al atractor y que con el tiempo se separan (exponencialmente), implica una dependencia sensitiva en las condiciones iniciales y da una apariencia caótica e impredecible al movimiento dando la estructura fractal del mismo. Hay un teorema<sup>3</sup> que relaciona esta expansión con la dimensión fractal del atractor extraño, de manera que los atractores hiperbólicos (y por lo tanto estables) son en general fractales.

Otro tipo de atractor es el llamado atractor de Hénon<sup>4</sup>, donde  $\Lambda$  es el conjunto límite del mapeo  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado por  $f(x,y) = (y+1-ax^2, bx)$  donde  $a = 1.4$  y  $b = 0.3$ . Hénon probó que  $\Lambda$  es atrayente y usó una computadora para demostrar que se ve como en la Figura 7. Para algunos valores de  $a$  y de  $b$  en estudios computacionales se ha visto que  $\Lambda$  se rompe en un número posiblemente infinito de atractores periódicos. Este atractor no satisface las propiedades de hiperbolicidad mencionadas anteriormente, y por eso hay otras defini-

ciones basadas en sus propiedades ergódicas pero que no veremos aquí.

El gran matemático René Thom atribuye a los atractores un significado básico como modelos en la ciencia. Dice: "Todo objeto o forma física puede ser representada por un atractor  $\Lambda$  de un sistema dinámico en el espacio base de variables internas"<sup>5</sup>.

Una rama de la Física de difícil análisis dinámico ha resultado ser la hidrodinámica; por ejemplo, el sistema  $dx/dt = -10x + 10y$ ,  $dy/dt = 28x - y - xz$ ,  $dz/dt = -8z + xy$  que es un caso extremo de simplificación en hidrodinámica y que fue estudiado por E. Lorenz (1963). En estudios de geofísica, presenta una especie de caos y aunque todavía no se demuestra su comportamiento caótico, se le han encontrado atractores extraños<sup>6</sup> que desde luego son fractales, los que se han analizado por la teoría de nudos<sup>7</sup>. Este problema está estrechamente relacionado con el análisis de los fenómenos de turbulencias.

Ruelle y Takens<sup>8</sup> fueron los primeros en proponer atractores extraños para modelar turbulencias, porque según las teorías anteriores (como la de Kolmogorov-Landau-Lifschitz) en las sucesivas etapas de la turbulencia surgen atractores a lo más casi-periódicos, los cuales son altamente inestables y difíciles de observar, mientras que los atractores extraños hiperbólicos tienen la combinación paradójica de estabilidad y caos que es tan notable en las turbulencias<sup>9</sup>.

FIGURA 5

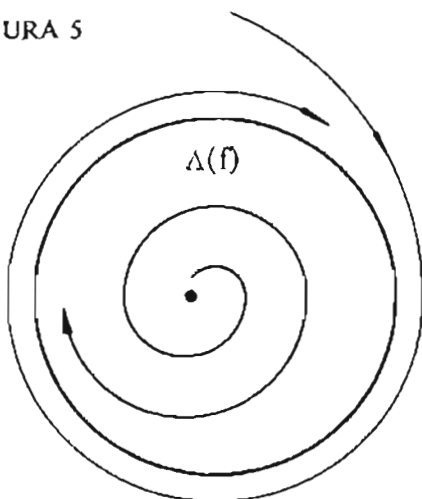
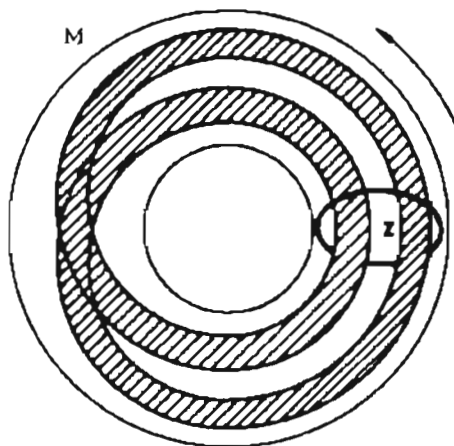


FIGURA 6



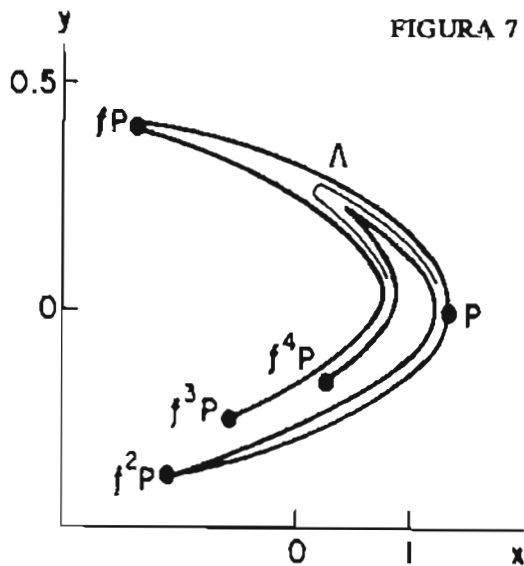


FIGURA 7

En la literatura matemática hay muchas construcciones geométrico-dinámicas de atractores extraños, por ejemplo, se construyen atractores hiperbólicos considerando acciones de espacios expansivos en otros espacios<sup>10</sup>.

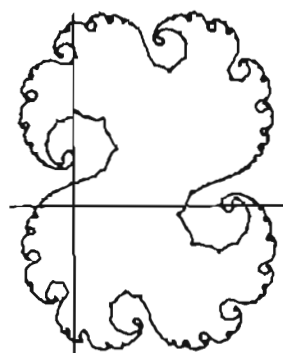
### Más dinámica y fractales

Un tipo de dinámica que ha resultado ser fundamental y que envuelve muchos de los fenómenos conocidos y mencionados anteriormente, es la dinámica de las familias de funciones de la forma  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $f_\lambda(x) = x^2 + \lambda$ ; ésta es una familia universal en el sentido de que cualquier función cuadrática se reduce a ella. Conforme el

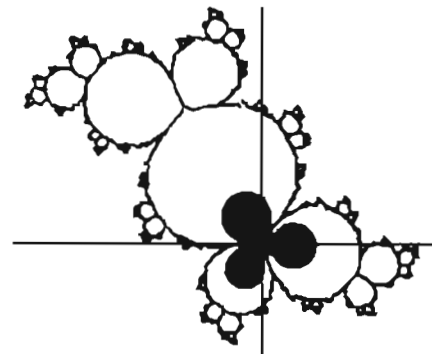
parámetro  $\lambda$  (un parámetro de control) se hace variar y empiezan a crearse cascadas de puntos  $2^n$  para  $n=1, 2, \dots$  (que se conoce como duplicación del periodo), sucede que  $\Lambda_\lambda$  es un atractor cada vez más complicado y que, para ciertos valores de  $\lambda$ , es un conjunto de Cantor. Cuando se hacen variar ciertos parámetros de control la dinámica de la función puede permanecer esencialmente igual o cambiar; cuando cambia se le llama bifurcación de la dinámica, y es lo que sucede en el proceso de la turbulencia, por lo que la familia  $f_\lambda$  (que es por otro lado de las familias más simples) encierra parte importante de este fenómeno<sup>11</sup>.

Más completo resulta estudiar las familias  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  donde  $f_\lambda(z) = z^2 + \lambda$  y el espacio  $\mathbb{C}$  son los números complejos. Gran parte de la historia del estudio de estas familias se remite igualmente a Newton, quien diseñó un algoritmo para encontrar raíces de polinomios. Un polinomio es una función de la forma  $p_N(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  y se trata de encontrar para qué valores de  $x$ , el polinomio evaluado en esos valores vale cero; a partir de este polinomio, Newton construyó una nueva función que llamaremos  $N_p(x)$  y que se define como  $N_p(x) = x - p(x)/p'(x)$  donde  $p'(x)$  es la primera derivada de  $p(x)$ . En nuestro lenguaje moderno de dinámica, los puntos fijos de  $N_p(x)$  corresponden a las raíces de  $p(x)$ .

FIGURA 8



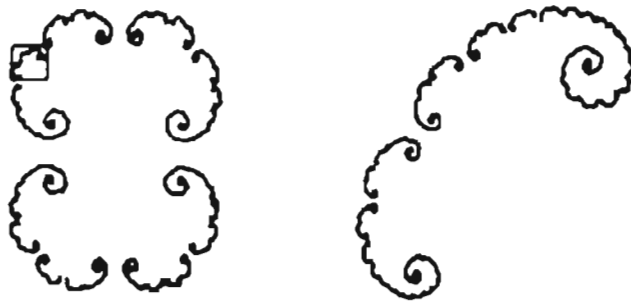
Conjunto de Julia de  $p(z)=e^{i/20}z+z^2$



Conjunto de Julia de  $p(z)=e^{i/3}z+z^2$

Representa al conjunto de puntos de valores iniciales donde el método de Newton falla, aplicado al polinomio  $p(z)=z^3-1=0$ , dando  $N_p(z)=(2z^3+1)/3z^2$ . Este conjunto se conoce como conjunto de Julia.

FIGURA 9



Estas figuras ilustran la naturaleza fractal, del conjunto de Julia, la de la derecha es una ampliación del recuadro marcado en la de la izquierda. Su dimensión fractal depende del parámetro  $\lambda$ .

En el siglo XIX, el matemático alemán Gauss demostró que todo polinomio que tiene los coeficientes  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$  en los números reales o en los complejos, tiene sus raíces precisamente dentro de los números complejos, así que la función de Newton  $N_p$  se extiende naturalmente dentro de los complejos y toma la forma

$$N_p(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)}$$

donde  $z$  es un número complejo.

Las funciones  $N_p(z)$  son una clase particular de funciones llamadas fun-

ciones racionales que se definen como aquellas funciones que son cocientes de polinomios; o sea,  $R(z)$  es función racional si  $R(z) = p(z) / q(z)$  donde  $p(z)$  y  $q(z)$  son polinomios. A partir de principios del siglo XX, Fatou y Julia<sup>12</sup> hicieron el estudio dinámico de estas funciones (véase la figura 8). Posteriormente, durante la década 1979-1989, Duady, Hubbard, Sullivan, Thurston, Herman y otros matemáticos han hecho aportaciones muy relevantes sobre estas funciones<sup>13</sup>. Todo esto ha dado lugar a un conjunto de fractales que han resultado ser de gran belleza y de los cuales se incluyen algunos ejemplos (véanse las Figuras 9 y 10).

FIGURA 10



El Conjunto de Mandelbrot. A la derecha, una ampliación del cuadrado del conjunto de Mandelbrot.



Ampliaciones de otras zonas del Conjunto de Mandelbrot.

## Referencias

<sup>1</sup> Smale, S. (Horseshoe), *Deffeomorphims with many periodic points. Differential and Combinatorial Topology*, Princeton Univ. Press, Princeton N. Y., pp. 63-80.

<sup>2</sup> Mandelbrot, B., *The fractal geometry of Nature*, Freeman, 1982.

<sup>3</sup> Kaplan, J. y Yorke, J., *Chaotic behavior of multidimensional difference Equations*, Lecture Notes in Mathematics., Springer-Verlag. 730, 1979.

<sup>4</sup> Hénon, M., A two dimensional mapping with a strange attractor. *Communications in Mathematical Physics*, Vol. 50, 1976, pp. 419-448.

<sup>5</sup> Thom, R., *Structural Stability and Morphogenesis*, Benjamin, New York, N.Y., 1972.

<sup>6</sup> Guckenheimer, J., *A strange strange attractor*, Applied Mathematical Series 19, Springer-Verlag, Berlin, 1976, pp. 368-381.

<sup>7</sup> Birman J. y Williams R., *Knot Holders*. Preprint.

<sup>8</sup> Ruelle D. y Takens F., On the nature of turbulence, *Communications in Mathematical Physics*, Vol. 20, 1971, pp. 167-192 y Vol. 23, 1971, pp. 343-344.

<sup>9</sup> Constantin P., Foias C., Temam R., *Attractors representing turbulent flows*, Memoirs of American Mathematical Society, Vol. 53, 1985, p. 314.

<sup>10</sup> Sienna, G., *Geodesic Anosov Flows and strange attractors* (En preparación).

<sup>11</sup> Feigenbaum M. J., *Journal of statistical Physics*. 19, 1978 y *Communications in Mathematical Physics* Vol. 77, 1980, p. 65 .

<sup>12</sup> Fatou P., *Sur les equations fonctionnelles*, Bulletin Societé Mathématique, France, Vol. 47, 1919, pp. 161-2171; Vol. 48 1920, pp. 33-94; Vol. 48, 1920, pp. 208-314.

<sup>13</sup> Blanchard P., *Complex analytic dynamics on the Riemann Sphere*, Bulletin of American Mathematical Society Vol. II, 1984, pp. 85-141.