

FRANJAS DE MOIRE

Jorge Ojeda, Eliezer Jara, Jorge Ibarra*

Resumen

Se describe un simple modelo matemático que relaciona una oscilación cosenoidal con un patrón geométrico de barras periódicas.

El modelo relaciona también la suma de dos oscilaciones cosenoidales de casi igual frecuencia (fenómeno de pulsación) con un par de patrones geométricos de barras de casi la misma frecuencia. De esta relación se identifican a las franjas de moiré con un nuevo patrón geométrico. Se discuten algunas de las propiedades y aplicaciones de las franjas de moiré.

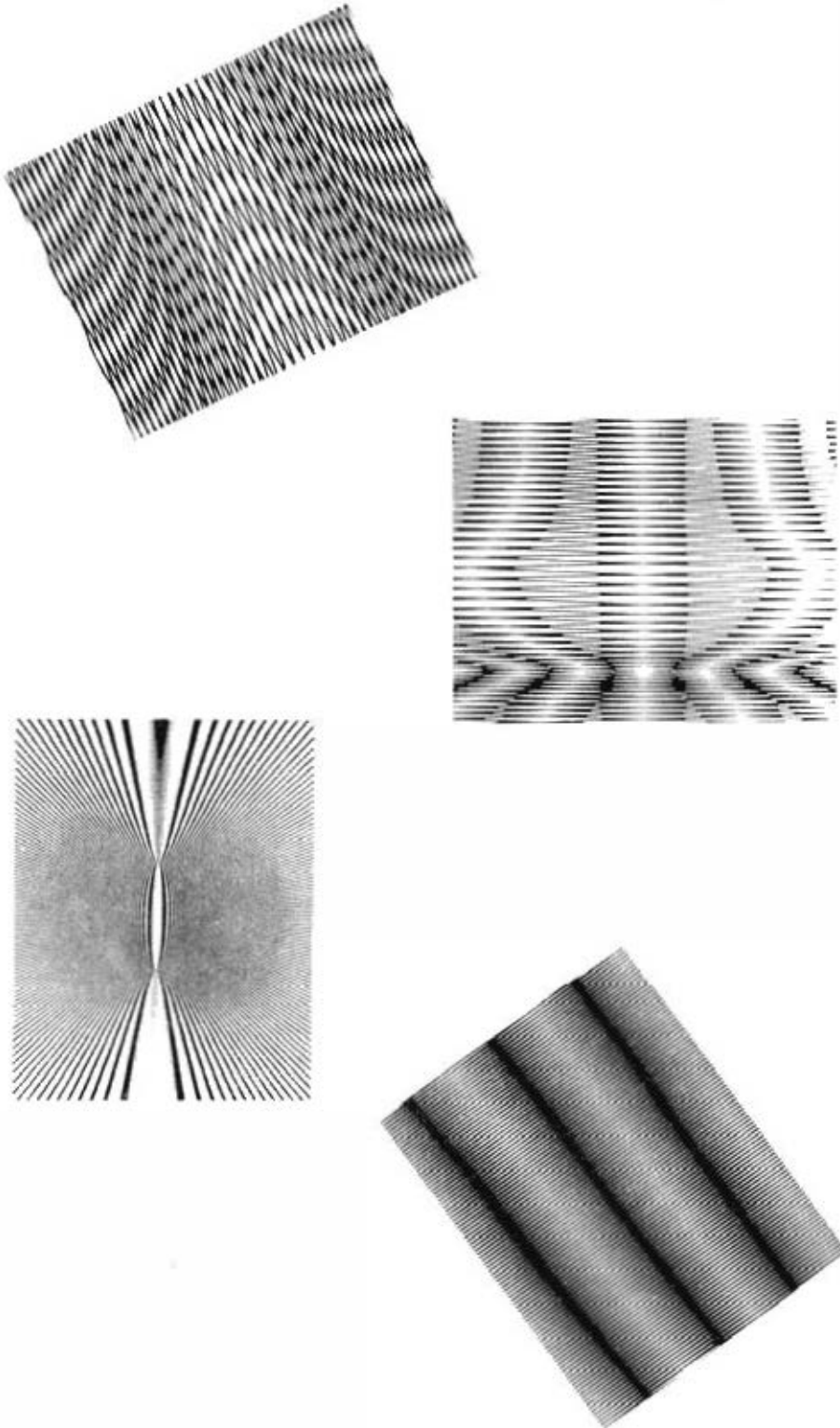
Introducción

En el desarrollo de la Física, el concepto de onda ha jugado un papel preponderante. Es por ello deseable, que dicho concepto forme parte del conocimiento del hombre contemporáneo. En particular, debe formar parte del conocimiento de las personas con preparación universitaria.

Con el propósito de crear herramientas matemáticas simples para el estudiante universitario que desea familiarizarse con las consecuencias del concepto de ondas, reportamos este trabajo. La meta es relacionar una oscilación cosenoidal con un patrón geométrico de barras periódicas. Esta relación se aprovecha para visualizar el fenómeno de interferencia de dos ondas de casi igual frecuencia (pulsación), con la generación y aplicaciones de las franjas de moiré. Las cuales encuentran aplicaciones prácticas, además de poseer un alto valor estético, en la docencia y la ingeniería.²⁻³

En la sección 2 del trabajo, se establece la relación matemática entre una

* Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica, Tonantzintla. Apartado Postal Nos. 216 y 51, Puebla, Pue., México.



oscilación cosenoidal y un patrón geométrico de barras periódicas. En la sección 3 se extiende la relación a la superposición (suma) de dos ondas cosenoidales con la superposición (producto) de dos patrones geométricos de barras periódicas. En la sección 4, se explica cómo se generan las franjas de moiré, y se mencionan algunas explicaciones.

Oscilaciones y patrones de barras

Una oscilación unidimensional $u(x)$, de forma cosenoidal (como la mostrada en la figura 1a) se puede expresar como

$$u(x) = A \cos 2\pi\nu x, \quad (1)$$

en donde A representa la amplitud de la oscilación y la ν es la frecuencia espacial de la onda.

Al patrón geométrico, mostrado en la figura 1b, se le puede describir matemáticamente (en su variación a lo largo de x) como

$$p(x) = (1 + \text{signo}[\cos 2\pi\nu x])/2 \quad (2)$$

En donde la función signo se define como:

$$\text{signo}[f(x)] = \begin{cases} 1 & \text{si } f(x) > 0 \\ -1 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases} \quad (3)$$

A la representación de la oscilación cosenoidal en la forma del patrón de barras, en la ecuación (2), se le puede considerar como una representación binaria. Ya que en vez de tomar todos los valores posibles entre $-A$ y A , sólo se consideran los valores uno o cero.

Es decir, que el patrón geométrico de la figura 1b puede considerarse como una visualización simplificada de la onda en la figura 1a.

Fenómeno de pulsación

Considérense ahora dos oscilaciones cosenoidales de casi igual frecuencia espacial (ver figura 2a y 2b), que pueden ser representadas por:

$$u_1(x) = A \cos 2\pi\nu x$$

$$u_2(x) = A \cos 2\pi(\nu + \delta\nu)x \quad (4)$$

La suma de estas dos ondas da como resultado una oscilación (mostrada en la figura 2c), de la forma

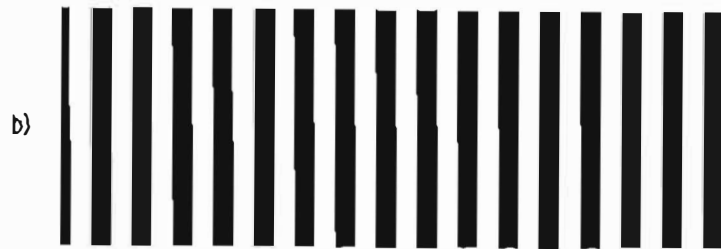
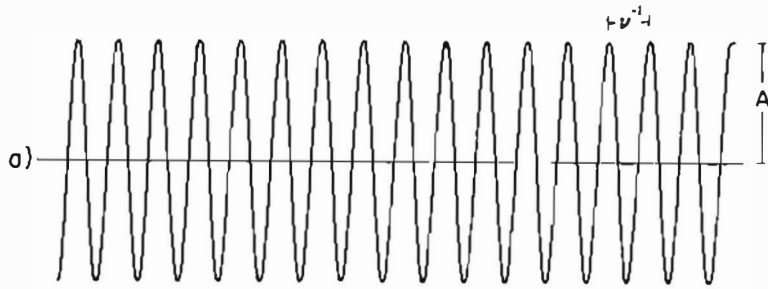


Figura 1. Onda cosenoidal y patrón geométrico periódico asociado.**

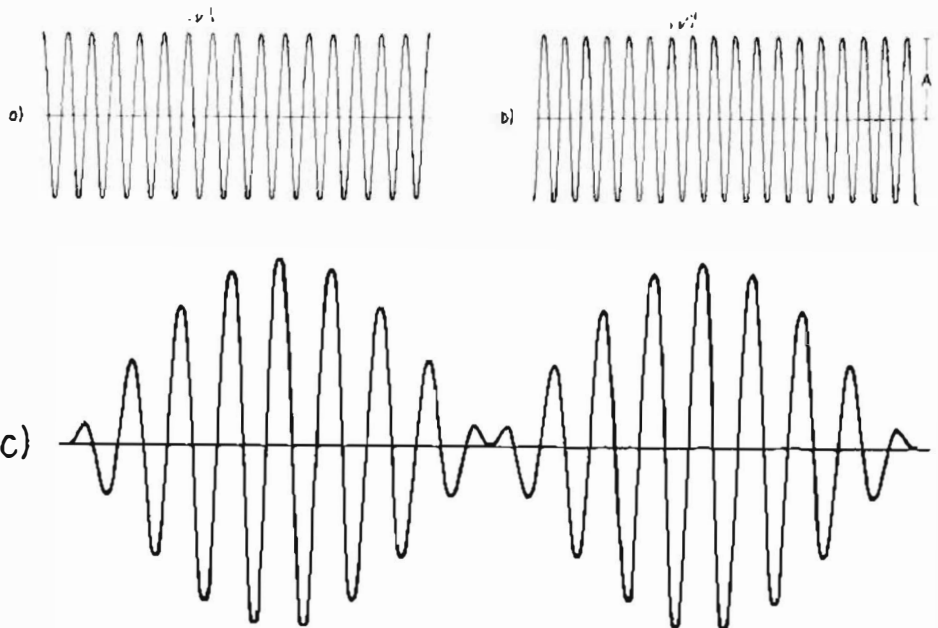


Figura 2. Fenómeno de pulsación resultante de sumar dos ondas cosenoidales de casi igual frecuencia espacial.

$$\begin{aligned} u(x) &= u_1(x) + u_2(x) \\ &= 2A [\cos 2\pi x \delta\nu] \cos 2\pi x (2\nu + \delta\nu) \end{aligned} \quad (5)$$

Esta oscilación resultante exhibe una onda llamada envolvente que tiene baja frecuencia espacial, $\delta\nu$, y una onda llamada acarreadora de alta frecuencia espacial $2\nu + \delta\nu$.

** Deseamos expresar nuestra gratitud a la Sra. Iracema Cabañas, y al Sr. Arturo Díaz por la ayuda que nos brindaron en articular las figuras mostradas.

La visualización simplificada al fenómeno de pulsación, en patrones de barras se obtiene al colocar dos patrones de casi igual frecuencia espacial.

$$p_1(x) = (1 + \text{signo}[\cos 2\pi\nu x])/2$$

$$p_2(x) = (1 + \text{signo}[\cos 2\pi(\nu + \delta\nu)x])/2 \quad (6)$$

uno encima del otro. En este caso el patrón resultante es el *producto* de ambos patrones. Es decir

$$p(x) = p_1(x) p_2(x) = 0.5 [p_1(x) + p_2(x)] + N(x) \quad (7)$$

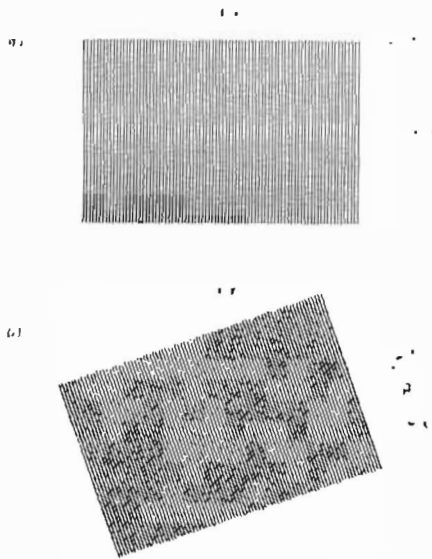


Figura 3. Rotación de un patrón geométrico periódico para generar a lo largo del eje x , original, un cambio en la frecuencia espacial.

De la ecuación (7) es posible reconocer que en el patrón resultante existe el término de la suma, como en la ecuación (5), $p_1(x) + p_2(x)$, más un nuevo término, $N(x)$, que no tiene equivalente en la superposición de dos ondas. La forma explícita del nuevo término es

$$N(x) = \text{sign}[\cos 2\pi\nu x] \text{sign}[\cos 2\pi(\nu + \delta\nu)x] \quad (8)$$

Algunas de sus propiedades se pueden analizar considerando sólo el producto de las funciones cosenoidales. Por lo que de aquí en adelante sólo consideraremos que

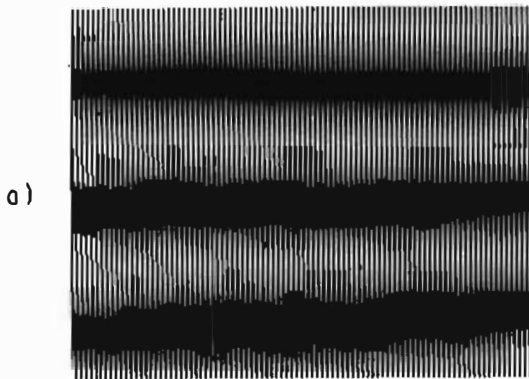
$$N(x) = [\cos 2\pi\nu x] [\cos 2\pi(\nu + \delta\nu)x] = 0.5 [\cos 4\pi\nu x + \cos 2\pi x \delta\nu] \quad (9)$$

Es decir que el nuevo término puede escribirse como la suma de dos cosenoidales, una de alta frecuencia espacial, 2ν , y la otra de baja frecuencia espacial $\delta\nu$. La de alta frecuencia espacial será difícil de visualizarse, y por el contrario, la de baja frecuencia será fácil de visualizarse.

Es a la onda de baja frecuencia espacial a la que se le conoce como franjas de moiré. O sea, que definimos a las franjas de moiré como al término de baja frecuencia espacial fácilmente observable que es

$$m(x) = \cos 2\pi x \delta\nu \quad (10)$$

y que resulta de encimar los dos patrones de barras periódicas de la ecuación (6). Es interesante mencionar que el nombre moiré (pronúnciese muaré) proviene del francés y denota un tejido periódico que al superponerse con el mismo produce franjas como en la ecuación (10).



Franjas de moiré

En la práctica es conveniente utilizar dos patrones de barras idénticos de la forma $p_1(x)$. A uno de estos dos patrones se le conserva invariante y sirve como referencia; mientras que al otro se le varía de algún modo para generar $p_2(x)$. Aclaremos este punto con un ejemplo simple.

Si al segundo patrón $p_1(x)$ mostrado en la figura 3a, se le gira por un ángulo θ , respecto al eje x , en el sentido contrario a las manecillas del reloj; entonces el patrón de barras variará ahora a lo largo de x' , como se muestra en la figura 3b. La variación a lo largo del eje inicial x es el patrón $p_2(x)$. En otras palabras

$$p_1(x') = p_2(x) \quad (11)$$

De las ecuaciones (6) y (11) tenemos entonces que sus argumentos obedecen la igualdad

$$\nu x' = (\nu + \delta\nu)x \quad (12)$$

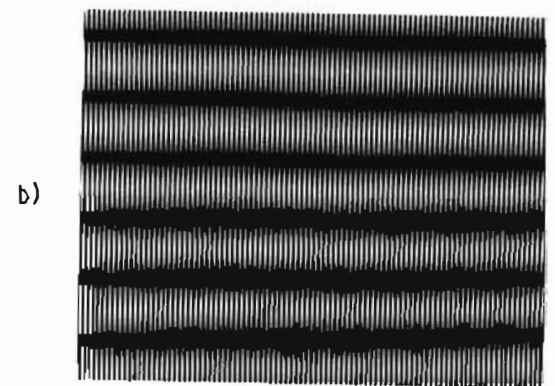


Figura 4. Franjas de moiré que se obtienen al superponer dos patrones geométricos periódicos de casi igual frecuencia espacial. Uno de ellos se obtiene por el método mostrado en la figura 3.

Pero sabemos que bajo una rotación

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta \quad (13)$$

consecuentemente:

$$x \delta \nu = \nu [x(\cos \theta - 1) + y \sin \theta] \quad (14)$$

El resultado en la ecuación (14) nos permite analizar el comportamiento de las franjas de moiré en la ecuación (10) para el caso de una rotación. Los máximos de las franjas de moiré se obtienen cuando

$$\nu [x(\cos \theta - 1) + y \sin \theta] = m:$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (15)$$

Es decir, que geométricamente están localizados en líneas rectas de la forma

$$\begin{aligned} y &= x(\cos \theta) / \sin \theta + m(\nu \sin \theta) \\ &= x \tan(\theta/2) + d \end{aligned} \quad (16)$$

Obviamente, el ángulo que tienen con respecto al eje x es $\phi = \theta/2$, y el período a lo largo del eje y es $d = 1/(\nu \sin \theta)$, como puede apreciarse en la figura 4.

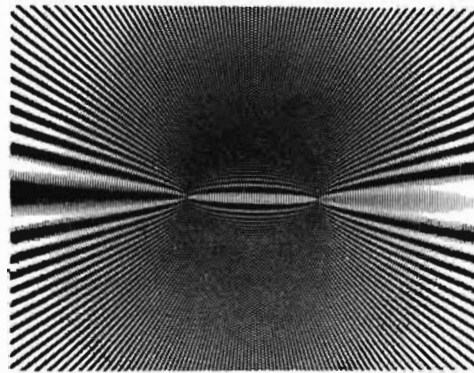
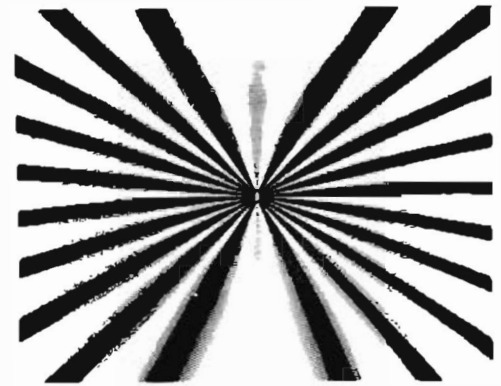


Figura 5. Franjas de moiré resultantes de superponer dos patrones de círculos concéntricos desplazados entre sí.

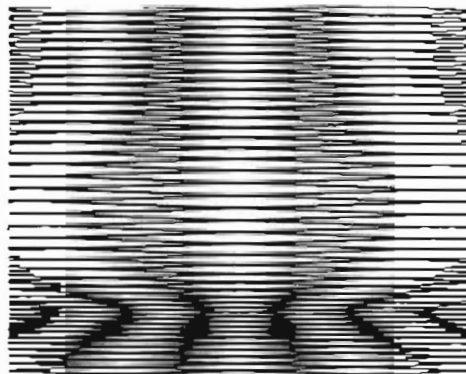
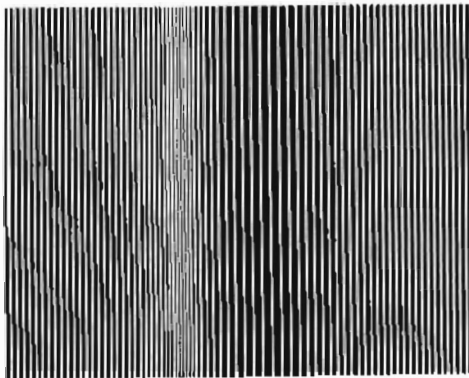


Figura 6. Red de frecuencia espacial variable y franjas de moiré resultantes de superponer esta red con otra igual pero desplazada.

Hasta aquí hemos considerado un patrón de barras periódico a lo largo del eje x . Sin embargo, no es necesario restringirse a tales tipos de patrones. Es perfectamente válido pensar que la periodicidad a lo largo de x , puede ser la resultante de un mapeo de una función de dos variables⁴ en otro espacio (ξ, η) y que por consiguiente el argumento de la función $p(x)$ es del tipo

$$2\pi \nu x = f(\xi, \eta) \quad (17)$$

Asimismo, podemos considerar que el patrón modificado es también el resultado de otro mapeo. Por lo cual su argumento es del tipo:

$$2\pi (\nu + \delta \nu) x = g(\xi, \eta) \quad (18)$$

Por lo que el argumento de las franjas de moiré en la ecuación (10) cumple con la relación

$$2\pi x \delta \nu = g(\xi, \eta) - f(\xi, \eta) \quad (19)$$

Tal como en el caso de la rotación, la localización de los máximos se encontrará

en los lugares geométricos en que

$$g(\xi, \eta) - f(\xi, \eta) = m/2\pi, \quad (20)$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

En las figuras 5, 6 y 7 mostramos varias franjas de moiré que se obtienen para dos tipos de mapeos. En la figura 5 se trata de círculos concéntricos igualmente espaciados, a los que se les desplaza entre sí. En la figura 5a el desplazamiento es a lo largo del eje y ; mientras que en la figura 5b es a lo largo del eje x . El desplazamiento en el último caso es mayor que en el primer caso.

Las franjas de moiré generadas pueden ser descritas del modo siguiente. Al argumento del patrón $p_1(x)$ se le puede relacionar con los círculos de la forma:

$$2\pi x \nu = g(\xi, \eta) = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} / d \quad (21)$$

mientras que el argumento del patrón $p_2(x)$ se le puede relacionar con los círculos desplazados

$$2\pi x (\nu + \delta\nu) = g(\xi, \eta) = \sqrt{(\xi-a)^2 + (\eta-b)^2} / d \quad (22)$$

Por lo tanto, las franjas de moiré quedan localizadas en hipérbolas que de acuerdo a la ecuación (20)

$$\sqrt{(\xi-a)^2 + (\eta-b)^2} - \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = ml/2\pi. \quad (23)$$

A las hipérbolas así generadas se les puede considerar como a los máximos que resultan de la interferencia constructiva de dos fuentes luminosas puntuales, emisoras de las ondas esféricas del conjunto de círculos concéntricos.

En otras palabras, las franjas de moiré, en este caso, son una representación geométrica del experimento de Young de la interferencia de dos fuentes puntuales. Esta representación tiene aplicaciones directas en holografía³ y en relatividad especial.⁵

Como se menciona en la introducción, las franjas de moiré tienen un gran atractivo estético; esto se puede observar de las obtenidas por desplazamiento relativo entre dos redes de periodicidad variable mostradas en las figuras 6 y 7.

En metrología óptica y mecánica la rotación, el desplazamiento y la distorsión del patrón $p_1(x)$ para obtener $p_2(x)$

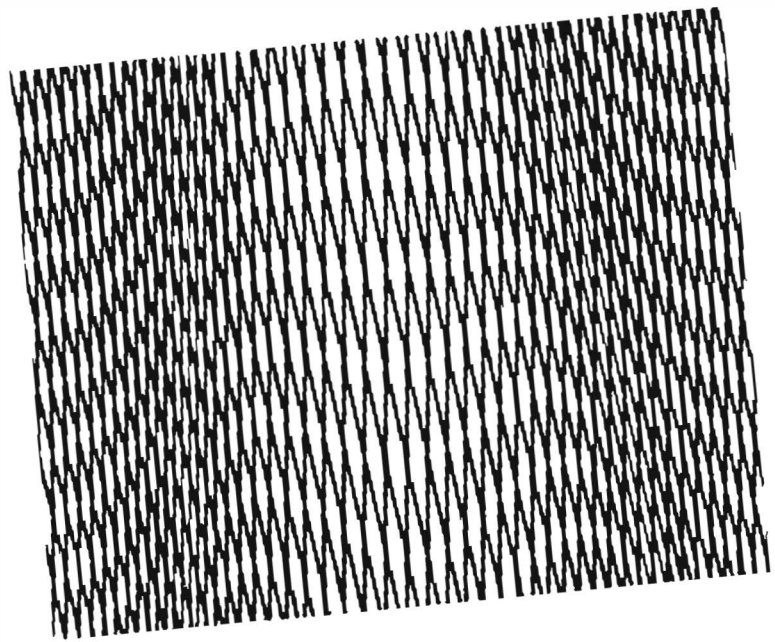
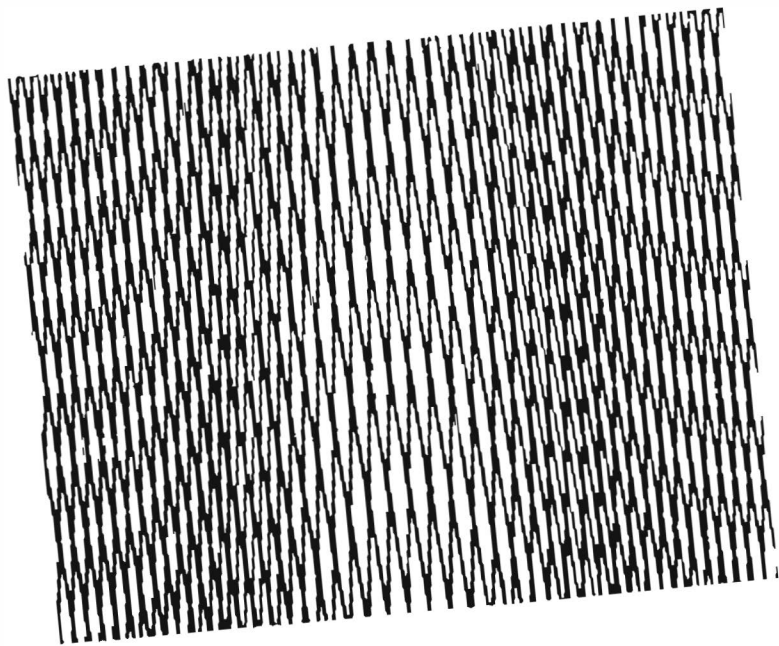


Figura 7. Franjas de moiré con la red de la figura 6.

Referencias

1. H. F. Meiners, *Physics demonstration experiments*, (The Ronald Press Co., American Association of Physics Teachers, New York, 1970).
2. P. S. Theocaris, *Moiré fringes in strain analysis*, (Pergamon Press, Oxford, 1969).
3. N. Abramson, *Nondestructive testing in metrology*, Cap. 6, in *Optical data processing*, Ed. D. Casasent (Springer Verlag, Berlin, 1978).
4. A. W. Lohmann.
5. N. Abramson, "Light-in-flight recording".
2. "Compensation for the limited speed of the light used for observation", *Appl. Opt.* 23, 1481 (1984).