# LAS REVOLUCIONES CIENTIFICAS EN MATEMATICAS: LA TEORIA DE CONJUNTOS*

Javier Echeverría Ezponda**

elementos núm. 7, año 2, vol. 1. Impreso en México

## Introducción

La filosofía de la ciencia vigente en el siglo XX, por lo menos a partir de la Segunda Guerra Mundial, aglutina a sus cultivadores en dos grandes bandos que, prescindiendo de las innumerables posiciones intermedias, podrían denominarse, respectivamente, *lógicos de la ciencia* e *historiadores de la ciencia.* Carnap, el círculo de Viena, Popper y otros (lo que Putnam llamó *received view*) estarían en el primer grupo, mientras que Kuhn, Lakatos, Feyerabend, etc., preconizarían estudios minuciosos de historia de la ciencia previamente a cualquier reflexión global, y mucho más a cualesquiera prescripciones normativas, sobre las teorías científicas.

No afirmo con lo anterior que las posturas sean homogéneas en uno y otro grupo. Son bien conocidas las polémicas y las divergencias entre autores que, según esta dicotomía, quedarían adscritos a las mismas posturas básicas. Se trata más bien de subrayar la importancia que, a partir de los años 60, han tomado los estudios de historia, sociología e incluso psicología de la ciencia, por oposición a la preponderancia anterior de los análisis exclusivamente lógico-formales de las teorías científicas.

La llamada concepción estructural, al principio denominada no-lingüística, iniciada por Sneed en 1971[1] y continuada por autores como Stegmüller, Adams, Balzer y Moulines, pretende ser la síntesis de los dos bandos precedentes, conjugando el estudio histórico minucioso de las teorías con el ulterior análisis, altamente formalizado, de su estructura y evolución. Se aceptan conceptos kuhnianos como los de revolución científica, ciencia normal, anomalías, enigmas, paradigmas o comunidades científicas, pero a la vez se propone un aparato formal que permite el análisis diacrónico de las teorías. Independientemente de las críticas que van a ser expuestas a continuación, hay que reconocer que la concepción estructural ha abierto una nueva etapa en filosofía de la ciencia, en particular por lo que respecta a la estructura y a las características formalizables de la evolución histórica de la ciencia.

Para terminar con esta brevísima introducción, subrayaré la importancia de otro aspecto del debate: si, pese a las profundas divergencias, algo hay en común entre

* Este trabajo se basa en la comunicación presentada bajo el mismo título al I Congreso Latinoamericano de Historia de las Ciencias, celebrado en La Habana, Cuba, del 21 al 25 de julio de 1985; se introducen, sin embargo, algunas correcciones y ampliaciones.

** Universidad del País Vasco.
Facultad de Filosofía y Ciencias de la Educación, Decanato, Apartado 1249, San Sebastián - Donostia.

todos los autores y escuelas mencionadas (con la excepción de Lakatos), consiste en la enorme importancia que conceden a la física a la hora de elaborar una teoría general de la ciencia. Las teorías matemáticas apenas son estudiadas por estos autores ni por sus seguidores, quienes se han centrado en las llamadas "ciencias con contenido empírico". Parecería que el prestigio de los estudios matemáticos, sobre todo a partir de Hilbert, Tarski y Göedel, agotase la filosofía de las matemáticas; sin embargo, es claro que la matemática no es instrumento válido de análisis de la historia de las matemáticas, con lo cual el cambio introducido por Kuhn en filosofía de la ciencia no habría llegado, excepción hecha de las investigaciones de Lakatos, a la filosofía de las matemáticas.

En 1976 Mehrtens[2] cuestionó la validez de las nociones kuhnianas para las matemáticas. Su diagnóstico era matizado: la idea de comunidad científica, o las matrices disciplinarias de los *Segundos pensamientos* de Khun, con sus generalizaciones simbólicas, sus modelos ontológicos, sus ejemplares y sus valores metodológicos, sí que eran aplicables a la filosofía de la matemática. Las nociones de crisis y de revolución científica, por el contrario, no tendrían equivalente en la historia de las matemáticas.

El presente trabajo trata de investigar este punto polémico en el caso concreto de la teoría de conjuntos. Pero sin duda habrá de ser ampliado y perfeccionado por medio de investigaciones históricas relativas a otras teorías matemáticas y a otros momentos de su historia, antes de que se pueda plantear una tesis general al respecto.

En cualquier caso, la restricción de la teoría de la ciencia a las disciplinas empíricas, y más concretamente a la física, es inaceptable. La filosofía de la ciencia ha de ser capaz de indagar, de ser posible

por la vía del estudio formalizado, los invariantes estructurales, sincrónicos y diacrónicos, de las teorías procedentes de las diversas ciencias conforme a estudios específicos de las mismas, en lugar de limitarse a proyectar sobre la historia de la biología, de las ciencias sociales o de las matemáticas esquemas de interpretación obtenidos exclusivamente del estudio de la historia de la física, como se ha venido haciendo en el presente siglo.

### Interés del análisis de la historia de la teoría de conjuntos

En el presente trabajo me centraré exclusivamente en la teoría de conjuntos, y dentro de ella en sus primeras etapas: concretamente en sus primeras formulaciones por parte de Cantor. Varios motivos otorgan un atractivo especial al estudio de la estructura de dicha teoría, entre los cuales mencionaré los cuatro siguientes:

1. Es indudable que, tanto por su emergencia como por su posterior desarrollo e implantación en la comunidad de matemáticos, por su influencia determinante sobre otras ciencias que utilizan su lenguaje como básico, por su difusión en la enseñanza universitaria y no-universitaria, etc., la teoría de conjuntos aparece como uno de los casos cruciales para determinar si en matemáticas ha habido o no revoluciones científicas en el sentido de Kuhn. Baste recordar, desde el punto de vista de la historia interna, la durísima polémica de Cantor contra el finitismo y el aritmetismo de Kronecker; las dificultades de Cantor para publicar sus artículos sobre teoría de conjuntos en el *Journal de Crelle*, así como para conseguir una cátedra en Berlín; los apoyos que buscó en matemáticos extranjeros (franceses, italianos, suecos) para romper el cerco de silencio tejido en Alemania en torno a ella; la fundación de una nueva sociedad de matemáticos en Alemania, la *Deutscher Mathematiker-Vereinigung*, con el propio Cantor como primer presidente, frente al poder académico de la época, la lenta y difícil progresión de la teoría en la comunidad de matemáticos, al menos hasta que Cantor encontró los decisivos apoyos de Klein y de Hilbert y hasta el Congreso Internacional de matemáticos en 1897. Estos y otros detalles históricos ofrecen muchos de los signos de lo que, a partir de Kuhn, se ha venido denominando revolución científica. La diferencia estriba en que, supuesto el finitismo de Kronecker como el paradigma rival, dicho paradigma no había entrado en crisis previamente ni desapareció luego tras el asentamiento de la teoría de conjuntos en la comunidad de matemáticos. Baste recordar que el propio Hilbert, desde posturas conjuntistas asumió buena parte del programa finitista, al proponer la matemática como alternativa a la crisis de fundamentos tras el descubrimiento de las paradojas. Otra diferencia estriba en que la llamada crisis de

fundamento no es una crisis en el sentido kuhniano: dicha crisis viene soportada por la propia teoría de conjuntos, es decir por la teoría que está en trance de imposición, y no de disolución.

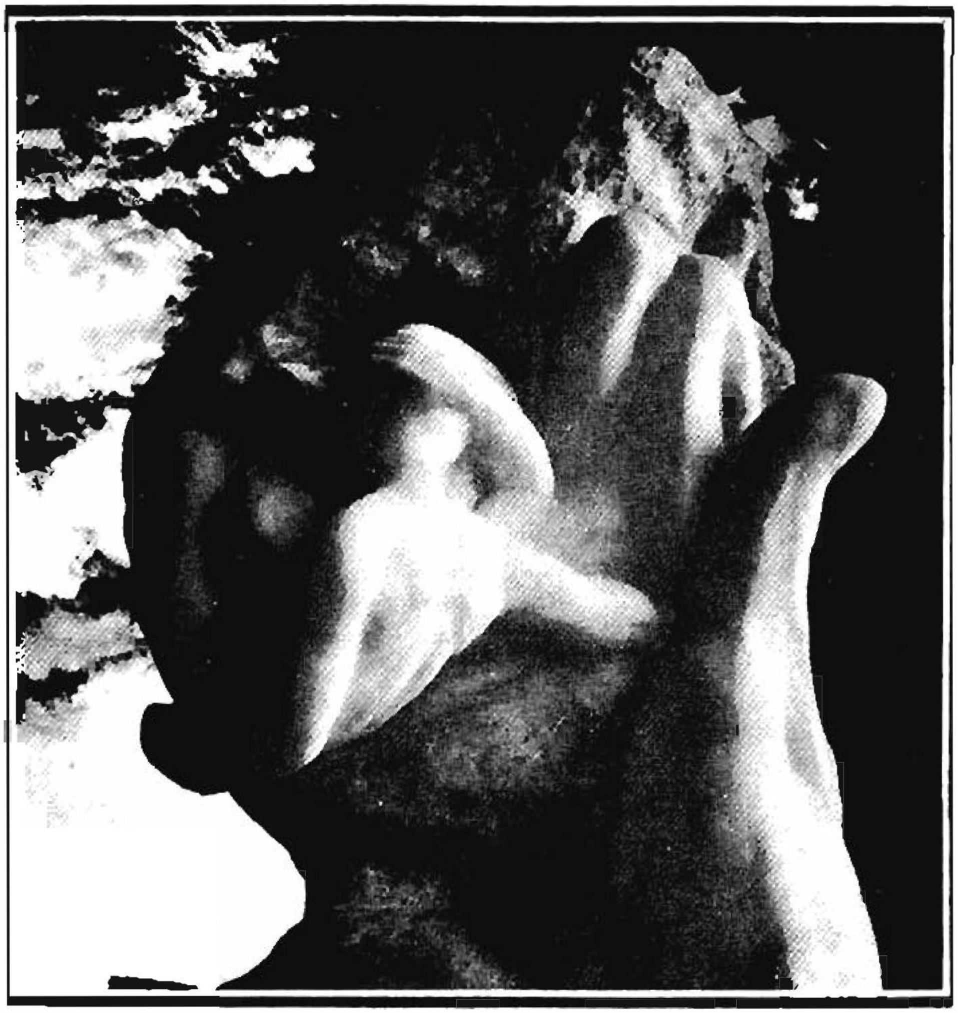
Otro elemento a tener en cuenta proviene de la incidencia de la teoría de conjuntos en la pedagogía de las matemáticas a lo largo del siglo XX. Su progresión en la escuela ha sido lenta y dificultosa, como se sabe, pero tampoco cabe duda de que ha logrado desplazar como libro de texto básico ni más ni menos que a los *Elementos* de Euclides, a los que ni siquiera el embate de las geometrías no euclídeas había alterado en su papel privilegiado a la hora de introducir las matemáticas en los primeros niveles docentes. La propia existencia de los diagramas de Venn representa a la perfección la noción kuhniana de *ejemplar*, radicalmente diferente de los anteriores (por ejemplo de las figuras geométricas clásicas). Desde otro punto de vista, la escritura por parte del grupo Bourbaki de una magna obra titulada significativamente *Elementos de matemáticas*, en la cual la teoría de conjuntos aparece como la fundamentadora de las restantes teorías matemáticas, es otro argumento más a favor de un cambio de paradigma: dicho tratado supondría la culminación de toda una etapa de ciencia normal ligada al paradigma conjuntista, el cual, tras la revolución de finales del siglo XIX, seguiría todavía vigente, sin que la teoría de categorías haya logrado todavía desplazarle.

2. La historia de la teoría cantoriana ha sido estudiada en los últimos años con mucho detalle, y ese trabajo previo de los historiadores de las matemáticas posibilita una reflexión global sobre la estructura de la teoría, así como sobre su desarrollo histórico. Piénsese por ejemplo en las monografías, entre otras muchas, de Meschkoski (1967),[3] Hawkins (1970),[4] Dauben (1979),[5] Moore (1982),[6] Grattan Guinness (1980)[7] y Hallet (1984),[8] así como en los múltiples artículos que las han preludiado. En lo que sigue será tenida particularmente en cuenta la penúltima y la última obra citadas.

3. La teoría de conjuntos puede ser considerada como una teoría con contenido empírico, en el sentido estructuralista del término. En efecto, existen leyes especiales y aplicaciones propuestas de dicha teoría, válidas en dominios empíricos. Baste como ejemplo la axiomatización de Kolmogorov del cálculo de probabilidades, que añade axiomas específicos a la teoría general de conjuntos, dando lugar a un marco teórico o estructura que puede ser interpretada sobre diversos modelos observables empíricamente. Y otro tanto cabría decir de la teoría de juegos, o de los propios diagramas de Venn, o de los juguetes pedagógicos que permiten, conforme se usan, el aprendizaje de los axiomas de la teoría.

4. La concepción estructural de las teorías científicas hace depender sus reconstrucciones lógicas de la técnica, propuesta por Suppes, de axiomatización informal en base al predicado conjuntista propio de cada teoría, así como de la teoría de modelos. Por consiguiente, el análisis estructural presupone y utiliza la teoría de conjuntos continuamente, como instrumento para la reconstrucción en la estructura de teorías empíricas.

La pregunta que se plantea en este trabajo, y a la cual se intentará dar una primera respuesta, es la siguiente: ¿es suficiente el aparato estructuralista para estudiar la emergencia y el desarrollo histórico de la teoría de conjuntos o, por



Esculturas y estudios de Auguste Rodín.

el contrario, dicha teoría plantea problemas específicos a la hora de ser analizada estructuralmente, que de alguna manera invalidan aspectos importantes de la metodología estructural para el análisis de las teorías científicas? Todo ello, como quedó dicho, sin alejarnos de la obra de Cantor, e incluso de las primeras etapas de su investigación.

## Etapas en el descubrimiento de la teoría de conjuntos por Cantor

A partir de los documentos disponibles y de los análisis históricos llevados a cabo, cabe distinguir, ya en la primera fase de emergencia de la teoría, hasta cinco etapas:

1. Es sabido que Cantor descubrió su teoría general de conjuntos, y en particular su teoría de los transfinitos, a partir de problemas matemáticos muy concretos, planteados por Heine, en relación con la unicidad de la representación de una función mediante series trigonométricas. Dauben (1971)[9] ha estudiado perfectamente este punto, por lo cual no insistiremos más en él. Baste recordar que, en esta primera ocasión, Cantor estudia únicamente conjuntos de números, tales como los coeficientes de una serie trigonométrica o las raíces de una ecuación polinómica.

2. La introducción de los *conjuntos derivados de puntos* implica una primera generalización del planteamiento inicial, al par que una tentativa concreta y exitosa de resolver el problema de partida. Pero la resolución de dicho problema no frenó la investigación, sino todo lo contrario. Lo que en un principio había aparecido como un mero recurso técnico para solucionar un problema concreto de la teoría de funciones pasó a ser luego, tal y como ha ocurrido repetidas veces a lo largo de la historia de las matemáticas, un objeto con interés propio, e incluso el germen de toda una teoría.

La operación de derivación consiste en definir, dado un conjunto cualquiera P de puntos (y no ya sólo de números), el conjunto derivado $P^{(1)}$ que contiene todos los puntos-límite del primero, como los llamó Cantor, es decir lo que actualmente suele denominarse puntos de acumulación. La operación de derivación resulta ser matemáticamente precisa e iterable, pese a que está definida sobre entidades que hasta entonces no habían sido considerados como objetos matemáticos: los conjuntos continuos o discontinuos de puntos, que ya no son figuras geométricas ni recorridos de funciones.

Surgieron así los conjuntos de *primera especie*, tales que $p^{(n)} = \phi$ para algún *n* finito, y los conjuntos de *segunda especie*, tales que $p^{(n)} \neq \phi$ para todo número natural *n*. Con esta distinción se prefigura ya la noción de transfinito, pero ésta todavía no ha aparecido, por lo cual debe de ser distinguida esta etapa como singular.

3. Con el fin de clasificar los conjuntos de segunda especie, Cantor introdujo los *símbolos de infinitud* en 1880 y los definió en función de la operación de derivación de la manera siguiente:

$$p^{(\infty)} = \bigcap_{n=1}^{\infty} p^{(n)};$$

$$p^{(\infty+1)} = (p^{(\infty)})^{(1)},$$

y así sucesivamente.

Los conjuntos derivados precedentes quedaban englobados en estos símbolos de infinitud, así como su clasificación, con lo cual se había cumplido un nuevo paso lógico en la creación de la teoría.

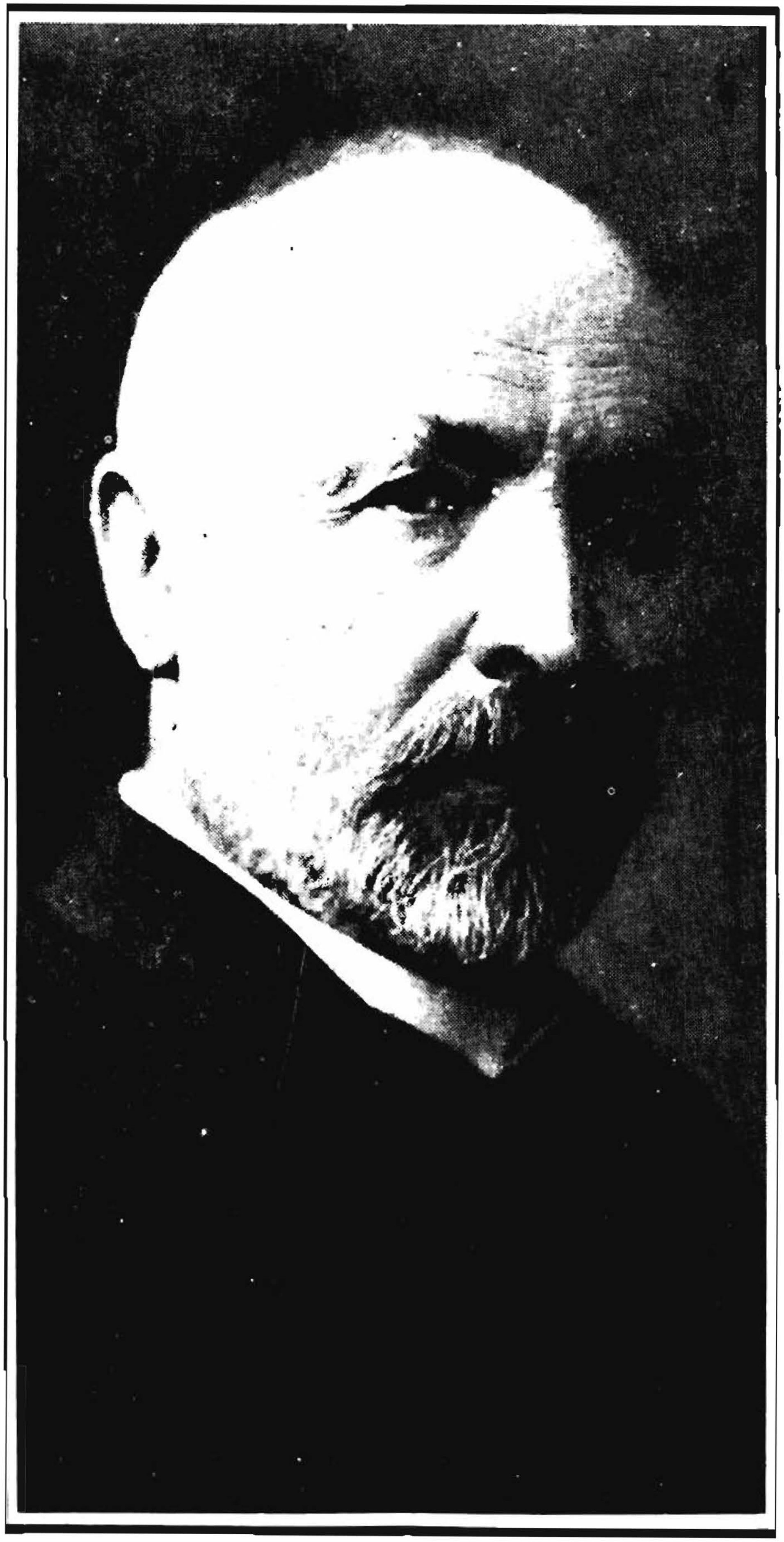
4. A continuación, tal como lo señala Hallet:

> Cantor empezó en seguida a utilizar *instintivamente* una aritmética de símbolos, combinándolos entre sí y con los números naturales.[10]

Con ello se entra en una nueva etapa, que la construcción estructural interpretaría como de construcción de un nuevo modelo parcial de la teoría. Hallet subraya que este paso implica lo que él llama *principio cantoriano de finitismo*, consistente en presuponer que los símbolos del infinito y los números naturales eran objetos operatoriamente equivalentes, al serles aplicables las mismas operaciones aritméticas, tanto a cada uno de ellos por separado como al combinarlos entre sí. Paso éste, por cierto, enormemente frecuente entre matemáticos cada vez que aparecen nuevos tipos de signos, y cuya función heurística es importantísima, tanto en la investigación cantoriana como en otros casos históricos. Por lo mismo, la denominación de principio de finitismo nos parece restrictiva, además de inadecuada. Podría ser llamado, perfectamente, principio de combinación operatoria de los signos, y habría de ser ligado a algún paradigma algebrista cuyos orígenes históricos se remontarían al siglo XVI, probablemente.

5. Tres años más tarde, en 1883, Cantor ya había asimilado esos símbolos a números, introduciendo el principio de correspondencia biunívoca entre dos conjuntos como la definición común para los números finitos y transfinitos. Surgen también los primeros descubrimientos concretos (hechos nuevos e imprevisible, en el sentido de Lakatos, al no estar planteados previamente como problemas ni tener paralelo con otros resultados y modelos matemáticos de la época) tales como la demostración de la biunivocidad entre N y Q y de la no biunivocidad entre N y R. Puede concluirse que, precisamente en esta etapa, el núcleo de la teoría de conjuntos queda ya constituido en la mente de Cantor, siendo el método diagonal el resultado más tangible y novedoso de la teoría, como lo será a continuación el teorema de Cantor, $N < 2^N$, que engendra la serie de los transfinitos.

Vamos a limitarnos a estos cinco momentos, sin proseguir con el



análisis de los momentos claves ulteriores del descubrimiento cantoriano. En 1883, en efecto, se produce un hecho significativo, que justifica este corte en el desarrollo histórico. Cantor había publicado hasta cinco artículos seguidos en los *Mathematische Annalen* bajo un mismo título: "Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten".[11] Decide juntarlos en forma de libro, cosa muy poco frecuente entre matemáticos cuando se trata de artículos publicados en revistas científicas, y redacta una introducción especial para dicha edición,[12] que por cierto luego no fue incluida por Zermelo en su recopilación de escritos de Cantor, publicada en 1932.[13] Dicha introducción abre una nueva fase en el despliegue de la teoría de conjuntos, debido a que inaugura lo que años después será llamado *fundamentación de la matemática*. La tendencia general del escrito consiste en tratar de reducir toda la matemática a la teoría de conjuntos, con lo cual se marca la transición desde los conjuntos de números y de puntos, que eran los investigados por Cantor hasta entonces, a la teoría abstracta de conjuntos.

La observación importante a hacer es la siguiente: Cantor da este último paso, tan esencial para la estructura final de la teoría y para sus ulteriores desarrollos históricos (paradojas incluidas) guiado por problemas filosóficos, y no ya para resolver problemas matemáticos concretos. La preocupación por los fundamentos de la matemática no aparece separada de la investigación propiamente matemática, sino como una fase más de la misma. Por otra parte, los trabajos ulteriores de Cantor van a estar muy influidos por la solución dada a las cuestiones filosóficas que se planteó con toda nitidez ya en 1883. Podría pensarse, y es corriente recurrir a este subterfugio, que esta transición sin solución de continuidad de la matemática a la filosofía de la matemática, que tiene lugar en plena emergencia de la teoría, depende de la peculiar formación y de los intereses teológicos-filosóficos de la persona concreta, Georg Cantor. Esta explicación psicologista, aunque debe ser tenida en cuenta, no resulta suficiente, debido a que en la evolución posterior de la teoría de conjuntos nos encontraremos de nuevo una y otra vez con ese mismo fenómeno de imbricación mutua entre lo que hoy en día se llama matemática y metamatemática. La fundamentación de la teoría de los conjuntos no es algo extrínseco a la teoría, sino que forma parte de su estructura interna, al menos si nos atenemos a los datos históricos, en lugar de a concepciones normativas que separan y escinden unas disciplinas de otras.

### La concepción estructural y el análisis lógico de las teorías científicas

Recordemos ahora brevemente, y por lo tanto de manera forzosamente imprecisa, los rasgos principales de la concepción estructural a la hora de analizar la estructura de una teoría.

Sneed, recogiendo una propuesta de Suppes,[14] propuso un análisis no-lingüístico o informal de las teorías, a base de definir predicados conjuntistas del tipo:

- *x* es una mecánica clásica de partículas,
- *x* es un grupo,
- *x* es una mecánica relativa de partículas, etc.

Aquellos objetos *x* que satisfacen dicho predicado se llaman modelos de esa teoría, distinguiéndose los modelos potenciales $M_p$, que abarcan a todas las entidades que podrían ser modelos de la teoría, y un subconjunto suyo, $M_{pp}$, de modelos parciales, para determinar los cuales se eliminan los términos teóricos de la teoría mediante el método de eliminación de Ramsey-Sneed. Asimismo se definen unas condiciones de ligadura entre unos y otros modelos parciales, para el caso de una misma entidad que pueda pertenecer a dos modelos distintos. Así surge, sin entrar en más precisiones, el núcleo de una teoría, que no es sino una estructura matemática abstracta.

Pero la estructura de una teoría con contenido empírico incluye también las aplicaciones propuestas de dicho núcleo, que se obtienen a base de añadir leyes o axiomas especiales. Cuando esas aplicaciones propuestas constituyen un subconjunto de los modelos parciales posibles, es decir cuando $I \subseteq M_{pp}$, se dice que la teoría es aplicada correctamente. Una aplicación incorrecta de una teoría, y por consiguiente una refutación en el sentido de Popper, no invalida el núcleo de la teoría, sino que simplemente modifica el conjunto I de aplicaciones propuestas. Una teoría puede permanecer incólume en el seno de una comunidad científica a pesar de que se conozcan anomalías para la misma. El núcleo sólo puede desaparecer de la ciencia vigente cuando se ha constituido otro núcleo teórico diferente, con sus correspondientes aplicaciones empíricas, es decir, cuando ha surgido un nuevo paradigma.

Este marco analítico, descrito muy suscintamente, ¿puede ser aplicado a las teorías matemáticas, y en concreto a la teoría de conjuntos? ¿Cabe plantearse la reconstrucción lógica de una teoría que responda al predicado:

*x* es una teoría (cantoriana) de conjuntos?

Fácilmente puede verse que la concepción estructural, tal y como ha sido propuesta hasta ahora, implica una cierta filosofía de la ciencia *ad hoc*, si se nos permite la expresión: y *ad hoc* para la física, pero no para las matemáticas, pese a que muchas de estas teorías sí que tienen contenido empírico en el sentido de la concepción estructural.

En primer lugar, la propia distinción entre términos teóricos y no-teóricos, y por lo tanto la utilización del método de eliminación de los términos teóricos de Ramsey-Sneed, parece completamente artificiosa en el caso de las matemáticas. Podría pensarse que el compás y la regla, en el caso de la geometría clásica, son reglas de correspondencia, pues permiten construir objetos observables que se corresponden con los términos teóricos propios de la matemática: circunferencia, recta, etc. La instanciación o ἔκθεσις, vista desde esta perspectiva, sería la operación que daría contenido empírico a las matemáticas. Pero se avanzaría muy poco en esa línea. Lo característico de las matemáticas, y desde luego también de la teoría de conjuntos, es que conceptualiza objetos que de por sí son ya signos:

Cantor estudió primero conjuntos de números que eran coeficientes de series trigonométricas o raíces de ecuaciones polinómicas, es decir que introdujo un nuevo sistema de signos y de nociones (el vocabulario y el lenguaje conjuntista) para designar objetos (puntos, números, etc.) que ya eran signos insertos en otras tantas teorías matemáticas. La operación continua a lo largo de la historia de las matemáticas es la reducción de unos sistemas de signos a otros: por ejemplo las figuras geométricas a ecuaciones, o los símbolos del infinito a números.

Sin embargo, la concepción estructural sí presenta algunas nociones que pueden ser útiles para analizar las teorías matemáticas, y en concreto su historia: por ejemplo la distinción entre modelos potenciales y modelos parciales. La sucesión de modelos parciales es perfectamente clara en la investigación efectiva de Cantor: primero conjuntos de coeficientes de series trigonométricas, luego conjuntos de números cualesquiera, a continuación conjuntos de puntos y conjuntos derivados de puntos, luego símbolos de infinitud, y por último conjuntos abstractos, teniendo cada uno de esos modelos parciales estructuras operacionales diversas, pero todas ellas reducibles a términos conjuntistas. En este sentido el análisis estructural podría ser, cuando menos, ilustrativo y preciso con respecto al desarrollo histórico. Desde el punto de vista de las fases de su emergencia, y prescindiendo de las diferencias entre los objetos de los que se ocupan una teoría matemática y una teoría física, los problemas que plantea la teoría de conjuntos son bastante similares a los de la mecánica newtoniana de partículas, tal y como los analiza Sneed.

**Dos problemas para el análisis estructural de la teoría de conjuntos**

Sin embargo, la teoría de conjuntos plantea dos dificultades importantes: una derivada de su historia inicial y otra de orden más general, o dificultad lógica.

La primera de ellas, ya mencionada, estriba en la aparición de una fase metateórica, o si se prefiere de fundamentación de la propia teoría, en plena emergencia de la misma. Si la concepción estructural ha de ser útil para la reconstrucción lógica de la historia de las teorías, y en particular de las revoluciones científicas, entonces ha de asimilar también dentro de la estructura de la teoría esta fase, cuya influencia en la investigación ulterior de Cantor fue muy grande. La definición general de conjunto que propone Cantor, ya en 1833, es la siguiente:

> Bajo la denominación de variedad (*Mannigfaltigkeit*) o de conjunto (*Menge*) entiendo en general toda multiplicidad que puede ser considerada como unidad, esto es toda colección de elementos determinados que pueden ser juntados en un todo por medio de una ley.[15]

Este salto a un modelo mucho más amplio como ámbito semántico de la noción básica, "conjunto", se produce precisamente en virtud de la reflexión teórica cantoriana. A nivel heurístico, e incluso como componente estructural, esta nueva vía de investigación tuvo una gran relevancia para el desarrollo de la teoría. Y sin embargo no parece fácil admitir, desde la concepción estructural, que se trata de una nueva aplicación propuesta, pese a que no cabe la menor duda de que para Cantor la noción de "conjunto" tiene significado empírico, por muy extenso que sea. Tomar el axioma de extensionali-

dad como la ley específica de esa aplicación propuesta, y explicar las ulteriores restricciones de ese axioma, tras la crisis de fundamentos, como otras tantas restricciones del modelo parcial propuesto, puede ser sugerente, pero conlleva una ampliación considerable de la noción de aplicación propuesta. La metateoría no es un subconjunto de los modelos potenciales parciales, sino que tiene un *status* epistemológico diferente, para la propia concepción estructural. Y sin embargo, este ejemplo histórico (que no sería el único en matemáticas) muestra que la metateoría también incide sobre la teoría, y ello en plena fase de emergencia, al orientar la investigación en un sentido o en otro.

Hay una segunda dificultad, más importante. Supuesto que la teoría de conjuntos tuviese un núcleo en el sentido estructural (por ejemplo el sistema ZF), que estuviera caracterizado por los modelos poteciales parciales que satisfaciesen el enunciado:

*x* es una teoría (cantoriana o ZF) de conjuntos, dicho núcleo sólo podría ser definido *sneedianamente* si se distinguiesen conjuntos $M_p$ y $M_{pp}$, así como relaciones de inclusión $M_{pp} \subseteq M_p$ o de ligadura entre ambos. Lo cual equivale a decir que la teoría abstracta de conjuntos, que históricamente sólo es un momento de la investigación cantoriana, ya está propuesta en la propia definición de núcleo. Resulta así que los distintos núcleos de las teorías científicas serían, al recurrir al lenguaje conjuntista para su formulación, otros tantos modelos de la teoría abstracta de conjuntos. Pero si esto es así, ¿qué sucede con la propia teoría de conjuntos, cuya estructura histórica no ofrecía en principio singularidades especiales a la hora de analizar su desarrollo como la construcción de sucesivos modelos parciales?

La aplicación del aparato estructuralista se encuentra con esta especie de círculo vicioso, que no parece fácil de sortear. Una teoría como la de conjuntos, para ser reconstruida lógicamente, habría de presuponer sus propios conceptos básicos. Dicho de otra manera: la propia concepción estructural podría ser considerada como una de las aplicaciones propuestas de la teoría de modelos, y por consiguiente de la teoría de conjuntos, por lo cual difícilmente podría luego reconstruir lógicamente a la teoría que le sirve de base.

Todavía otras consideraciones, a título de conclusión. La reflexión metateórica ha de ser considerada, por lo menos en el caso de la teoría de conjuntos, como una componente más de dicha teoría, e incluso como una de las fases principales de la revolución que llevó aparejada. Y aunque no es el momento de hacerlo, podría mostrarse que también en el caso de otras teorías (Newton incluido), las consideraciones filosóficas desempeñan una función heurística importante y por consiguiente han de ser tenidas en cuenta como una componente más de la estructura de la teoría. La tentativa de separar la investigación propiamente matemática de la investigación filosófica, sea ésta fundamentista o no, implica dejar de lado toda una serie de datos históricos tan válidos como los distintos modelos parciales que fueron siendo los ámbitos de aplicación progresiva de la teoría cantoriana. El prurito demarcacionista difícilmente puede tener validez a la hora de estudiar la evolución de las teorías.

Dicho en forma más concreta: en los procesos de revolución científica, y particularmente en ellos, aparecen fases de desarrollo de las teorías en las que los aspectos de fundamentación filosófica (o lógica, o de cualquier otro tipo) son investigados a fondo. Ese tipo de trabajos suele luego influir, en mayor o menor medida, en el desarrollo ulterior de la teoría, pero asimismo puede tener una influencia decisiva cara a la aceptación o no aceptación de la misma por parte de autoridades científicas y público en general. Los trabajos de fundamentación y de reflexión filosófica inciden especialmente en la historia externa, además de en la interna. Unicamente en las fases de ciencia normal se produce el decaimiento de este tipo de investigaciones.

## Referencias


1. Sneed, J.D. *The logical structure of mathematical physics*, Reidel Pub. Co., Dordrecht- Holanda, 1971.
2. Mehrtens, H. "T.S. Kuhn's theories and mathematics: A discussion paper on the 'new historiography' of mathematics", en *Historia Mathematica* 3, pp. 297-320, 1976.
3. Meschkowski, H. *Probleme des Unendlichen: Werk und Leben Georg Cantors*, Vieweg, Braunschweig, 1967.
4. Hawkins, T. *Lebesgue's theory of integration*, Chelsea, Nueva York, 1970.
5. Dauben, J. *Georg Cantor: his mathematics and philosophy of the infinite*, Harvard Univ. Press, Boston Ma., 1979.
6. Moore, G.H. *Zermelo's axiom of choice: its origin, development and influence*. Springer, Berlín, 1982.
7. Grattan-Guinness. *From the calculus to set theory*, Duckworth, Londres, 1980.
8. Hallet, M. *Cantorian set theory and the limitation of size*, Clarendon Press, Oxford, 1984.
9. Dauben, J. "The trigonometric background to Cantor's theory of sets", en *Archive for the History of Exact Ideas* 7, pp. 181-216, 1971.
10. Hallet, *op, cit.*, p. 5.
11. *Ibid.*, pp. 32-40.
12. G. Cantor, *Mathematische Annalen* 15 (1879), 1-7; 17 (1880), 355-8; 20 (1882), 113-21; 21 (1883), 51-58; 21 (1883), 545-586.
13. G. Cantor. *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalt* (ed. E. Zermelo), Springer, Berlín, 1932 (reed. 1980).
14. Suppes, P. *Introduction to logic*, Nueva York, Van Nostrand, 1957.
15. G. Cantor. "Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeits lehre", en *Gesammelte Abhandlungen*, *op. cit.*, p. 244, nota 1.