

Matemáticas de la estética

George David
Birkhoff

EL PROBLEMA ESTÉTICO

Muchas percepciones visuales y auditivas van acompañadas por un cierto sentimiento de valor claramente diferenciable de las afecciones sensuales, emocionales, morales o intelectuales. A la rama del conocimiento denominada estética le atañen primariamente este sentimiento estético y los objetos estéticos que lo producen.

Hay numerosas clases de objetos estéticos y cada una de ellas origina un sentimiento estético *sui generis*. Tales objetos, sin embargo, son de dos categorías: algunos, como las puestas de sol, se encuentran en la naturaleza, mientras que otros son obra de los artistas. La calidad de la primera categoría es más o menos accidental, mientras que la segunda viene a la existencia como libre expresión de los ideales estéticos. Es por ello que el arte, más que la naturaleza, provee el objeto principal de la estética.

El hecho de que los objetos pertenecientes a una clase definida admitan una comparación intuitiva directa con respecto a los valores estéticos es de decisiva importancia en estética. El artista y el *connaisseur* destacan en su capacidad de llevar a buen término discriminaciones de este tipo.

En la medida en que la estética tenga éxito en sus aspiraciones científicas, debe proveer alguna clase racional para tales comparaciones intuitivas. De hecho, el problema fundamental de la estética consiste en determinar, dentro de cada clase de objetos estéticos, aquellos atributos específicos de los que el valor estético depende.

La experiencia estética típica puede considerarse como integrada por tres fases sucesivas: 1) un esfuerzo preliminar de atención, requerido por el acto de la percepción, y que aumenta en proporción a lo que denominaremos complejidad (c') del objeto; 2) el sentimiento del valor o cuantía estética (c) que recompensa tal esfuerzo; y, finalmente 3), la observación o comprobación de que el objeto se caracteriza por cierta armonía u orden (o), más o menos encubierto, que parece necesario al efecto estético.

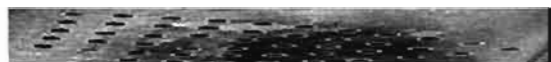
FORMULACIÓN MATEMÁTICA DEL PROBLEMA

El análisis de la experiencia estética parece indicar que la emoción estética es primeramente sugerida por un grado excepcional de las relaciones armoniosas contenidas en el objeto. Más precisamente, si consideramos c , o y c' como variables cuantificables, podemos escribir $c = \frac{o}{c'}$ resumiendo así en una fórmula básica la conjetura de que la cuantía estética se halla determinada por la densidad del orden de las relaciones en el objeto estético.

La conocida exigencia estética de "unidad en la variedad" está sin duda relacionada de modo inmediato con esta fórmula. La definición de lo bello como aquello que nos ofrece el mayor número de ideas en el más corto tiempo (formulada por Hermerhuis en el siglo XVIII) es de naturaleza análoga.



© Egmont Contreras, *Mars*, de la serie *Triton IV*, 1999.



Si admitimos la validez de tal definición, puede formularse matemáticamente el problema estético fundamental del modo siguiente: dentro de cada clase de objetos estéticos, si definimos el orden o y la complejidad c' , estableciendo la razón $c = \frac{o}{c'}$, resulta la cuantía de cualquier objeto de la clase.

Nuestro propósito fundamental es considerar distintas clases de objetos estéticos y resolver en estos casos, en la medida que podamos, el problema estético fundamental en la forma matemática que acabamos de enunciar. Antes de tal aplicación de hecho conviene, sin embargo, indicar las bases psicológicas de la fórmula y las condiciones en las que puede ser aplicada.

LA SENSACIÓN DE ESFUERZO EN LA EXPERIENCIA ESTÉTICA

Desde el punto de vista físico-psicológico, el acto de la percepción de un objeto comienza con el estímulo de los órganos de los sentidos visual o auditivo, y continúa hasta que tal estímulo y la excitación cerebral resultante terminan. Para que el acto de la percepción se realice debidamente se requiere también el apropiado ámbito de atención de la conciencia. La actitud atenta tiene, por descontado, su correlativo psicológico encargado en especial de asegurar que los ajustes motores requeridos en el acto de la percepción sean convenientemente llevados a cabo. Tales ajustes se realizan normalmente sin la intervención de las ideas motoras que acompañan a todos los actos voluntarios, y en tal sentido son automáticos. En términos más fisiológicos: el estímulo dispara una corriente nerviosa que, después de llegar a la corteza cerebral, revierte en parte a la periferia siguiendo, como corresponde a todo acto automático, un trayecto determinado por el hábito.

Ahora bien, aunque tales ajustes automáticos se realizan sin la intervención de ideas motoras, existe un bien conocido esfuerzo de atención de tensión variable en el curso de la realización de tales ajustes. Éste constituye una parte definida e importante del sentimiento general característico del estado de atención.

El hecho de que se requiera algún tipo de interés para mantener la atención parecería indicar que este sentimiento no tiene un tono positivo (agradable), sino más bien negativo. Si recordamos, además, que los llamados actos automáticos no son sino la resultante de actos idénticos realizados habitualmente, podemos convencernos de que quedan vestigios de las ideas motoras aplicadas originalmente, y de que ellas motivan esta sensación de esfuerzo.



© Egmont Contreras. Moonwalker de la serie Tritón IV, 1998

Desde tal punto de vista, la sensación de esfuerzo que acompaña siempre a la percepción aparece como la suma de las sensaciones de tensión que acompañan a los distintos ajustes automáticos.

EL SIGNIFICADO PSICOLÓGICO DE COMPLEJIDAD

Supongamos que A, B, C,... son los distintos ajustes automáticos requeridos, con respectivos índices de tensión a, b, c,... y que tales ajustes A, B, C... tienen lugar r, s, t, ... veces respectivamente. Ahora bien, esta sensación de esfuerzo es la contrapartida psicológica de lo que hemos denominado complejidad c' del objeto estético. Así, tenemos que considerar la suma de los distintos índices como la medida de la complejidad, y escribir por tanto $c' = ra + sb + tc + \dots$

Un simple ejemplo puede servir para aclarar este punto de vista. Supongamos que fijamos la atención sobre una baldosa poligonal convexa. El acto de atención implicado es tan rápido que parece casi automático. Cuando los ojos siguen los sucesivos lados del polígono y los ajustes motores correspondientes se realizan automáticamente, la sensación de esfuerzo es prácticamente insignificante. Sin embargo, según la opinión antes expresada, existe una débil sensación de tensión en cada ajuste, y la complejidad c' podrá medirse por el número de lados del polígono.

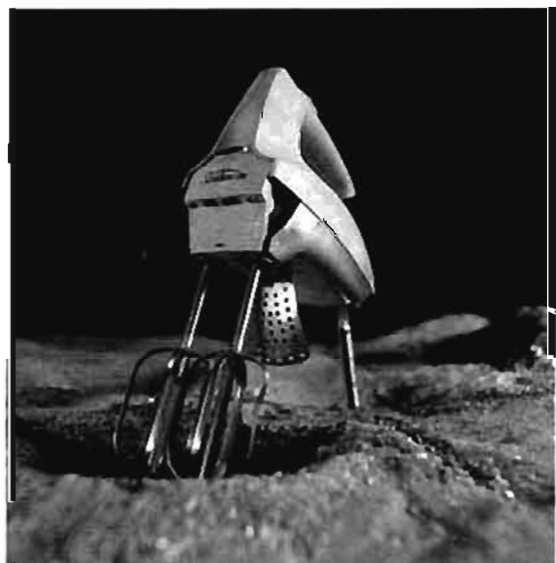
Una ilustración quizás más satisfactoria la ofrece cualquier melodía simple. En este caso, los ajustes motores automáticos necesarios para el acto de percepción son los ajustes incipientes de las cuerdas vocales a los sucesivos

fonos. Evidentemente, en este caso la complejidad c' nos vendría dada por el número de notas de la melodía.

ASOCIACIONES Y SENTIMIENTO ESTÉTICO

Hasta aquí hemos considerado solamente los actos de percepción de un objeto estético en la medida en que implicaban un cierto esfuerzo de atención. Esta sensación de esfuerzo encuentra su correlación en la parte eferente de la corriente nerviosa que suscita los ajustes motores automáticos requeridos y que no hace referencia directa alguna al sentimiento estético. Para encontrar la causa (psicológicamente hablando) del sentimiento estético, hemos de atender a esta parte complementaria de la corriente nerviosa que, incidiendo en los centros auditivos y visuales, suscita sensaciones derivadas del objeto y despierta entonces las distintas ideas asociadas con sus sentimientos correspondientes. Estas sensaciones, junto con las ideas asociadas y sus sentimientos correspondientes, constituyen la plena percepción del objeto. Es en estas asociaciones, más que en las sensaciones mismas, donde encontraremos el factor estético determinante.

En muchos casos de percepción estética se produce una más o menos completa identificación del perceptor con el objeto estético. Este sentimiento de "empatía", que el psicólogo Lipps ha subrayado, contribuye a realzar el efecto estético. De similar manera, la real participación por parte del perceptor, como cuando se canta una tonadilla y se la oye al mismo tiempo, realizará su efecto.



© Egmont Contreras. Sornbeam de la serie Tritón IV, 2000

Las meras asociaciones verbales resultan irrelevantes para la experiencia estética. O dicho de otro modo, las asociaciones estéticas son de tipo intuitivo.

Cuando, por ejemplo, veo un objeto simétrico, siento una cualidad agradable, pero no tengo que decirme explícitamente a mí mismo: "¡qué simétrico!" Este rasgo característico puede explicarse del modo siguiente. En el curso de la experiencia individual se descubre generalmente que los objetos simétricos poseen cualidades excepcionales y deseables. Nuestros propios cuerpos no nos parecen de este modo perfectamente formados si no son simétricos. Más aún, la técnica visual y táctil por la que percibimos la simetría de numerosos objetos es uniforme, altamente desarrollada y la aplicamos casi instantáneamente. Es esta técnica la que sirve como base de las asociaciones. Como consecuencia de ello, la percepción de cualquier objeto simétrico va acompañada de un sentimiento estético intuitivo de tono positivo.

Podría parecer casi preferible que no se produjeran asociaciones verbales. La excepcional eficacia en estética de las asociaciones más o menos ocultas es probablemente debida al hecho de que nunca se da cuenta verbal de las mismas.

EL PAPEL DE LA AFECCIÓN SENSUAL

La típica percepción estética es, ante todo, de tipo auditivo o visual y ya no va por ende acompañada por la estimulación de las extremidades de los llamados órganos inferiores. Si es así, las afecciones sensuales que intervienen serán altamente refinadas. Sin embargo, puesto que las afecciones sensuales con un tono ligeramente positivo acostumbran acompañar a las sensaciones visuales o auditivas, puede parecer que tales afecciones sensuales requieran alguna consideración por parte del sentimiento estético. De hecho, en mi opinión, puede prescindirse de este componente en los casos más interesantes, justamente porque el tono positivo de la afección sensual está siempre presente y en modo alguno diferencia una percepción de otra.

Por ejemplo, todas las secuencias de tonos musicales puros son igualmente agradables en lo que concierne a las sensaciones individuales. Sin embargo, algunas de estas frecuencias son de calidad melódica mientras que otras no. Por lo tanto, y aunque lo agradable de los sonidos individua-



© Egonmont Contreras, X-line, de la serie *Tritón IV*, 1998

les forma parte del tono del sentimiento, podemos prescindir de este componente sensual cuando comparamos la calidad melódica de varias secuencias de tonos musicales.

Para reforzar esta opinión voy a tomar brevemente en consideración ciertos fenómenos auditivos que a primera vista parecen contradecirla.

Al ser oído un intervalo musical disonante —como un semitono— el tono resultante del sentimiento es negativo. De modo similar, al ser oído un intervalo musical consonante como la quinta perfecta, este tono es positivo. ¿Pero no puede considerarse la sensación de un intervalo disonante como una sensación auditiva singular comparable con la de un intervalo consonante, y no resulta necesario en este caso modificar la conclusión de la constancia de la afección sensual?

Para responder a esta pregunta recordemos que los tonos musicales, tanto los producidos por la voz humana como los de origen mecánico, contienen un tono fundamental puro de una cierta frecuencia de vibración y puros sobretonos de frecuencia doble, (la octava), triple (la octava de la quinta exacta), etcétera; en este caso consideramos, con Helmholtz, un tono puro como la auténtica sensación individual del sonido. De este modo, la conexión entre cualquier tono y sus sobretonos se opera mediante una "asociación por continuidad".

Si tal es el caso, un intervalo disonante, compuesto de dos tonos disonantes, puede implicar un tono de sentimiento negativo, mientras que los dos tonos que constituyen un intervalo consonante, al estar relacionadas por asociación con sus sobretonos, pueden tener un tono positivo. De ahí que la diferencia de efecto estético entre un intervalo musical consonante o disonante pueda ser explicada mediante la sola asociación.



ASOCIACIONES FORMALES Y CONNOTATIVAS

Hay que llamar la atención sobre la división fundamental de los tipos de asociación que intervienen en la experiencia estética.

Ciertos tipos de asociación son tan simples y unitarios que pueden ser inmediatamente definidos, y su papel verificado con exactitud. Existen, por otro lado, muchas asociaciones de sumo interés para la estética que no admiten el análisis pues afectan nuestra experiencia en distintos sentidos. Las asociaciones del primer tipo serán las suscitadas por el sentido de un bello poema.

Para diferenciarlas convenientemente, denominaremos a las asociaciones "formales" o "connotativas", según sean del primer tipo o del segundo. Dos ejemplos de ello son los siguientes.

Rectángulo en posición vertical ———> simetría vertical

Intervalo de nota y su octava ———> consonancia

No existe nombre alguno para la propiedad meramente señalada por la técnica visual o auditiva implicada.

Todas las asociaciones que no son de este tipo formal simple, serán denominadas connotativas.

ELEMENTOS DE ORDEN FORMALES Y CONNOTATIVOS

La propiedad del objeto que corresponde a cualquier asociación será denominada un "elemento de orden"; y llamaremos formal o connotativo a tal "elemento de orden", según sea la naturaleza de la asociación. Así, un elemento formal de orden resulta de una simple propiedad física, por ejemplo la consonancia en el caso de un intervalo musical, o la simetría en el de una figura geométrica.

Los elementos de orden y las asociaciones correspondientes no van siempre acompañadas por un sentimiento de tono positivo. Una disonancia aguda, por ejemplo, es un elemento de orden con un tono negativo.

TIPOS DE ELEMENTOS FORMALES DE ORDEN

Los tipos de elementos formales de orden que de hecho encontramos son, ante todo, los de tono evidentemente positivo —repetición y similitud, contraste, igualdad, simetría, balance y secuencia—, cada uno de los cuales toma distintas formas. Todos ellos pueden ser en general considerados como de efecto positivo.

Existe, además, un elemento de orden, basado en los apropiados centros de atención y reposo, algo menos evidente, pero que desempeña también su papel. Un cuadro, por ejemplo, debe tener un centro predominante de interés en el que el ojo pueda reposar; de modo parecido, en la música occidental conviene empezar con el acorde tónico central y volver a él para concluir.

Por otro lado, la ambigüedad y la innecesaria repetición o imperfección son elementos formales de orden de tipo característicamente negativo. Un rectángulo casi, pero no totalmente, cuadrado, es desagradablemente ambigüo; un poema plagado de aliteraciones y asonancias fatiga por indebida repetición; una pieza musical en la que suena mal una sola nota queda estropeada por innecesaria imperfección.

EL SIGNIFICADO PSICOLÓGICO DE "ORDEN"

Estamos ahora en condiciones de tratar del orden o del objeto estético de modo análogo a como tratamos la complejidad C' .

Supongamos que distintas asociaciones $L, M, N, \dots$ tienen lugar con índices de tono del sentimiento $l, m, n, \dots$. En este caso los índices pueden ser positivos, nulos o negativos, según sean los tonos del sentimiento positivos, indiferentes o negativos. Si las asociaciones $L, M, N, \dots$ ocurren $u, v, w, \dots$ veces, respectivamente, podemos entonces considerar el tono total del sentimiento como el efecto resultante representado por la suma $ul + vm + wn + \dots$

Este efecto es la contrapartida psicológica de lo que llamábamos el orden o del objeto estético, por cuanto $L, M, N, \dots$



© Egmont Contreras, Taladro Montana, de la serie Trilón IV, 1999.

corresponden a lo que hemos denominado elementos de orden en el objeto estético.

Podemos así escribir: $O = u + v + w + \dots$

Para ofrecer un ejemplo, supongamos que tenemos ante nosotros varias baldosas poligonales en posición vertical. ¿Cuáles son los elementos de orden y las asociaciones correspondientes que determinan el sentimiento de valor estético que acompaña al acto de percepción de tales baldosas? Si una baldosa es simétrica con relación a un eje vertical, la simetría vertical aparece como agradable. Pero una baldosa puede también tener una simetría de rotación; una baldosa cuadrada, por ejemplo, tiene esta propiedad cuando puede hacerse girar en ángulo recto sin que su posición quede afectada. Por último, si los lados de una baldosa corresponden a los lados de un esquema rectangular, como en la cruz griega, la relación con dicho esquema resulta agradable.

EL CONCEPTO DE CUANTÍA ESTÉTICA

La cuantía estética c de una clase de objetos estéticos es, ante todo, un índice cuantitativo de su eficacia estética comparativa.

Resulta imposible comparar objetos de diferentes tipos, según indicábamos al principio. ¿Quién se atrevería, por ejemplo, a comparar un jarrón y una melodía? De hecho, para que la comparación sea posible, las clases deben ser especialmente restringidas. Es así inútil comparar una pintura al óleo con una acuarela, excepto indirectamente, por comparación de cada una con los mejores ejemplares de su tipo; y, desde luego, podría compararse la sola composición de ambos cuadros a través de sus reproducciones fotográficas. Por otra parte, las fotografías de una misma persona pueden ser fácilmente comparadas y organizadas en orden de preferencia.

Pero incluso cuando la clase es lo bastante restringida, las preferencias de los individuos varían según su gusto y su experiencia estética. Las preferencias de una misma persona varían, además, a lo largo de su vida. Así, tal comparación estética —de la que la cuantía c es el índice determinante— sólo tendrá un auténtico sentido cuando represente el juicio normal o medio de algún grupo selecto de observadores. En la consideración de la música occidental, por ejemplo, será lógico atenerse al consenso de quienes están familiarizados con ella.

El concepto de cuantía estética c es, en consecuencia, aplicable sólo cuando la clase de objetos está tan delimitada que la comparación intuitiva directa es posible, caso en el



cual la ordenación de la cuantía estética representa el juicio estético de un observador normal ideal.

LA FÓRMULA BÁSICA

Si nuestro análisis precedente es correcto, el sentimiento de cuantía estética surge derivativamente del cálculo intuitivo de la cantidad de orden O inherente al objeto estético en relación con su complejidad c' . Trataremos primero de demostrarlo sobre la base de una analogía para proceder luego a una argumentación más puramente matemática.

Tomaremos la analogía del campo económico. ¿Cuál, entre distintas empresas de un mismo tipo, es considerada como la más próspera? En cada empresa se hallan implicados una cierta inversión i y un cierto beneficio b . La razón $\frac{b}{i}$ representa el porcentaje de interés de la inversión y es considerada como índice económico de la prosperidad de una empresa.

De similar manera, en la percepción de objetos estéticos pertenecientes a una clase definida, se halla implicada una sensación de esfuerzo de atención, medida por c' , que viene recompensada por cierto sentimiento de tono positivo, medido por O . Es natural que la recompensa sea proporcional al esfuerzo, como es el caso en una empresa económica. Así, por analogía, la razón $\frac{O}{c'}$ es la que mejor representa la cuantía estética c .

UN ARGUMENTO MATEMÁTICO

Más matemáticas, aunque quizás no más convincentemente; podemos argumentar del modo siguiente: hay que suponer en primer lugar que si dos objetos de la clase tienen el mismo orden O y la misma complejidad c' sus cuantías estéticas deben ser consideradas como idénticas. Así podemos escribir, $c = f(O, c')$ y sostener de este modo que la cuantía estética sólo depende funcionalmente de O y de c' .

Es evidente que si incrementamos el orden sin alterar la complejidad o disminuimos la complejidad sin alterar el orden, el valor c queda incrementado. Pero estas dos leyes no sirven para determinar la función f .

Con tal propósito imaginemos el siguiente experimento hipotético. Supongamos que tenemos ante nosotros un cierto conjunto de k objetos de la clase, todos del mismo orden O y la misma complejidad c' , y también un segundo conjunto de k_1



objetos de la clase, todos de orden o , y complejidad c' . Escogamos ahora k y k_1 de modo que $k_1 c'$ sea igual a $k c'$.

Procedamos entonces del modo siguiente. Observemos, uno tras otro, todos los objetos del primer conjunto; el esfuerzo total vendría desde luego medido por $k c'$, y el tono total del sentimiento estético por $k o$. Observemos de igual modo todos los del segundo conjunto. El esfuerzo será el mismo que antes, ya que $k_1 c'$ es igual a $k c'$; y el tono total del sentimiento vendrá dado por $k_1 o$.

Si la cuantía estética de los objetos de la segunda clase es igual a la de los pertenecientes a la primera, parece indudable que el tono total del sentimiento será el mismo en ambos casos, de modo que $k_1 o$ equivaldrá a $k o$. Establecido esto, concluiremos enseguida que las razones $\frac{o}{c'}$ y $\frac{o}{c}$ son idénticas. En consecuencia, la cuantía estética depende sólo de la razón o proporción de o a c' : $c = f \frac{o}{c'}$.

Podemos ahora dar el último paso. Puesto que lo que importa cuando ordenamos según la cuantía estética no es la magnitud numérica real de f sino tan sólo su magnitud relativa, y puesto que c ha de aumentar con $\frac{o}{c'}$ podemos propiamente definir c como equivalente a la razón de o a c' .

Es obvio que la cuantía estética c determinada de este modo es igual a cero ($c = 0$) cuando el tono del sentimiento derivado de las ideas asociadas es indiferente.

EL ALCANCE DE LA FÓRMULA

Según ha sido presentada, la fórmula básica puede ser aplicada a cualquier clase de objetos estéticos suficientemente delimitada.

No parece ahora difícil pensar una cuantía simple y razonable de la complejidad c' de los objetos estéticos de la clase. Por otro lado, el orden o debe dar cuenta de todos los tipos de asociación inducidos por los objetos, sean éstos formales o connotativos; y ha de asignarse a cada uno de

© Egmont Contreras, *Nodriza*, de la serie *Tritón IV*, 1999.



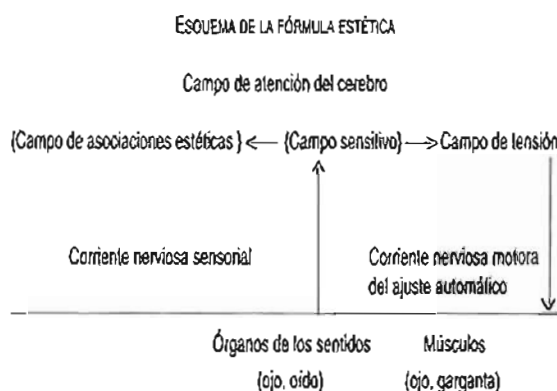
ellos un índice adecuado. Por desgracia, los elementos connotativos de orden no pueden ser tratados así, puesto que son de una inconcebible variedad y escapan a la posibilidad de un análisis preciso.

Es así claro que la completa aplicación cuantitativa de la fórmula básica puede realizarse sólo cuando los elementos de orden son fundamentalmente formales. Desde luego, es siempre posible considerar la fórmula en la estricta medida en que hace relación a elementos formales de orden, realizando de este modo una aplicación parcial.

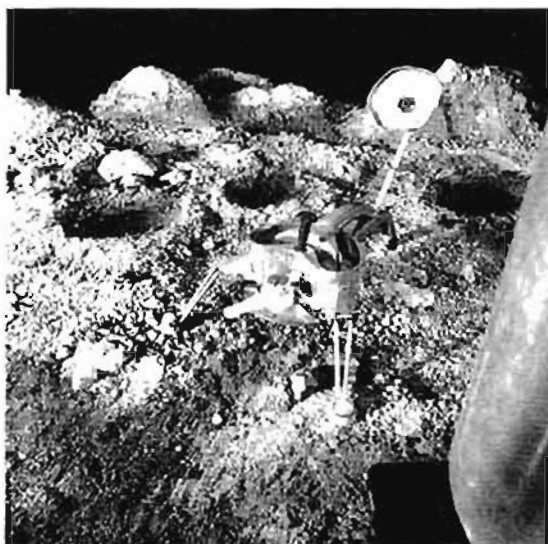
Nuestra atención queda, por consiguiente, dirigida casi exclusivamente hacia el aspecto formal del arte, el único al que puede aplicarse cuantitativamente la fórmula básica de la cuantía estética. Nuestra primera y principal aspiración será realizar un análisis en casos importantes típicos de extrema simplicidad. Desde las posiciones así conquistadas será posible tomar brevemente en consideración cuestiones más generales. Al seguirse este programa no existe, desde luego, la intención de negar la trascendental importancia del aspecto connotativo de todo arte creativo.

UN ESQUEMA

El esquema y la leyenda que se adjuntan pueden servir para recordar el anterior análisis de la experiencia estética y la fórmula estética básica a la cual conduce.



La complejidad (c') es medida considerando los ajustes motores automáticos. El orden (o) es medido considerando las asociaciones estéticas. La cuantía estética $c = \frac{o}{c'}$, indica el valor estético comparativo.



© Egmont Contreras, *Skorpion*, de la serie *Trón IV*, 1998

MÉTODO DE APLICACIÓN

Incluso en los casos más favorables, las principales reglas adoptadas para la determinación de o , c' y, subsiguientemente, de la cuantía estética c , son necesariamente empíricas. Los símbolos o y c' representan de hecho valores sociales y participan de la antigüedad propia de tales valores. Por ejemplo, el poder adquisitivo de la moneda puede sólo determinarse por medio de reglas empíricas, y sin embargo el concepto implicado es de fundamental importancia para la economía.

Debería añadirse al mismo tiempo que tal método empírico parece ser el único que permite un estudio científico de esta categoría general.

Trataremos siempre de elegir aquellos elementos formales de orden de una importancia estética incuestionable, y de definir los índices de la manera más simple y razonable que sea posible.

Pondremos atención en los dos siguientes *desiderata*:

En la medida de lo posible, estos índices han de ser tomados como iguales, o en todo caso de la manera más simple que sea compatible con los hechos.

Los distintos elementos de orden deben ser considerados sólo en cuanto son lógicamente independientes. Si, por ejemplo, $a = b$ es una igualdad que interviene en o , y si $b = c$ es otra igualdad del mismo género, la igualdad $a = c$ no será entonces computada independientemente.

George David Birkhoff, matemático americano (1884-1944).
 Texto tomado del libro de James R. Newman (comp.), *The world of mathematics*, Simon and Schuster, Nueva York, 1956.