El cuasi-empirismo en la filosofía de las matemáticas

Eduardo
Harada Olivares

¿QUÉ SON LAS MATEMÁTICAS?

Desde sus orígenes mismos, la filosofía se ha interesado en las matemáticas pues parecen ofrecer el tipo de conocimiento al que tradicionalmente ella ha aspirado: infalible y exacto, a diferencia del empírico o del que nos proporcionan los sentidos.[1]

La matemática, sobre todo el método axiomático de la geometría euclidiana, se convirtió en un modelo metodológico para muchas corrientes filosóficas e inspiró sueños relativos a una "matemática del pensamiento" que nos permitiría calcular en lugar de razonar, obtener resultados seguros y precisos, y que podría ser aplicada automáticamente, incluso por una máquina, para resolver problemas éticos, políticos, etcétera.[2]

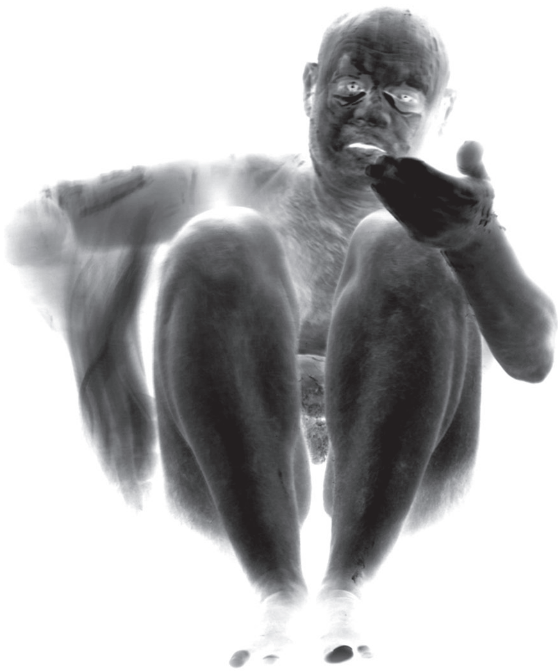
Pero, realmente, ¿qué son las matemáticas?, ¿qué clase de disciplina constituyen?, ¿qué las caracteriza y distingue de otras disciplinas y actividades humanas?, ¿qué hacen los matemáticos cuando las practican? La respuesta que normalmente se daría a estas preguntas es que son una ciencia formal y exacta, es decir, sólo se interesan por las relaciones abstractas entre ciertos elementos, mas no por los elementos concretos en sí mismos, lo cual les permite conseguir resultados precisos.

Según lo anterior, las matemáticas son radicalmente distintas a las ciencias empíricas –ya sean naturales o sociales– que estudian aspectos concretos de la realidad y, por ello, recurren a la experiencia, es decir, a la observación o a la experimentación, pero sólo logran resultados aproximados, pues la experiencia siempre es particular y contingente.

En la terminología filosófica tradicional, sobre todo a partir de Kant, se diría que los enunciados matemáticos son "analíticos" y que el conocimiento que proporcionan es *a priori*, esto es, no depende de la experiencia y, por ello, es universal y necesario.

De acuerdo con el realismo o platonismo, lo anterior es posible debido a que el tipo de entidades a las que las matemáticas se refieren (no sólo los números sino también los puntos, las funciones, los conjuntos, etc.) no se pueden percibir por medio de los órganos de los sentidos ni están ubicados espacio-temporalmente: podemos percibir *un* número 1 escrito en un libro, pero nunca *el* número 1, del cual son instancias los números concretos que percibimos.

Por eso se ha pensado que las entidades matemáticas, aunque reales o independientes de nosotros, no son físicas, sino inteligibles: se puede pensar en ellas, incluso percibirlas, mas no por medio de los órganos de los sentidos sino de una "intuición intelectual". Sin embargo, tampoco se reducen a las ideas o a las imágenes mentales que tenemos de ellas, pues mientras éstas varían en cada individuo, las entidades matemáticas son iguales para todos y no cambian.



© **Sergio Javier González Carlos,** de la serie *Mi demonio*, 2005.

LA "CRISIS" DE LOS FUNDAMENTOS DE LAS MATEMÁTICAS

La imagen tradicional de las matemáticas (formal e infalible) fue cuestionada a raíz de la llamada "crisis de los fundamentos de las matemáticas", que sucedió en el siglo XIX. Dicha "crisis" se originó principalmente por dos descubrimientos: primero, el de las geometrías no euclidianas y, segundo, el de la teoría de los conjuntos.

Desde la antigüedad se puso en duda el famoso quinto postulado, según el cual por un punto externo a una línea recta únicamente puede pasar una sola línea paralela,[3] pues dicho teorema no parecía intuitivamente verdadero y no se podía reducir a los otros postulados.[4] Poco a poco se desarrollaron geometrías que no sólo dejaban de lado dicho postulado sino que partían de postulados radicalmente diferentes: por un punto externo a una línea pueden pasar un número infinito de líneas paralelas o ninguna en absoluto. Al principio se pensó que las geometrías no euclidianas eran simples juegos intelectuales, que no correspondían a la realidad, pero con la teoría de la relatividad de Einstein quedó claro que el espacio físico real, debido a la fuerza de la gravedad, es, por decirlo así, "curvo" y no "plano", como se supone equivocadamente en la geometría euclidiana.

La geometría es la disciplina matemática que parece más cercana a la realidad y a la experiencia, así que lo anterior fue un duro golpe para la imagen tradicional de las matemáticas: se llegó a la conclusión de que todos los sistemas axiomáticos son meramente convencionales, ninguno en sí mismo verdadero, que los axiomas no son "verdades autoevidentes" sino, simplemente, enunciados que se eligen de modo arbitrario (aunque restringidos a los límites que establecen los valores de la consistencia y la sencillez) y que se aceptan sin prueba para poder demostrar otros.[5]

Pero, de todas formas, surgieron dudas acerca de los conceptos y principios de los que se partía en las matemáticas, así como respecto a los métodos que se empleaban para obtener conclusiones derivadas de ellos, pues se temía que posteriormente, debido a que esos "fundamentos" no eran seguros, se produjeran contradicciones, lo cual pondría en peligro toda la estructura de las matemáticas y, con ello, a todas las ciencias que se apoyan en ellas.

La "crisis" en los fundamentos de las matemáticas dio lugar, precisamente, a los programas fundacionistas (logicismo y formalismo) que consideran que las matemáticas carecen o requieren de fundamentos, entendidos éstos como últimos y seguros, y que la filosofía, a través de un análisis lógico, puede proporcionárselos.

El segundo factor que contribuyó sustancialmente a la "crisis" de las matemáticas provino de la teoría de conjuntos propuesta por Georg Cantor, que se creyó podría servir para fundamentar lógicamente a la matemática, es decir, para definir todos los conceptos matemáticos por medio de conceptos lógicos y reducir todos los teoremas matemáticos a principios lógicos. Esto fue, precisamente, lo que Gottlob Frege intentó llevar a cabo con su programa logicista. En efecto, poco a poco se había demostrado que la aritmética era la parte más fundamental de las matemáticas, en el sentido de que todos los números pueden ser definidos en términos de los enteros. No obstante, Frege determinó que la definición del concepto de número era inadecuada, así que ofreció una caracterización puramente conjuntista de él.

Por su parte, Russell detectó una paradoja en la teoría de conjuntos: existen conjuntos que, contradictoriamente, se incluyen y excluyen a sí mismos, como el conjunto de todos los conjuntos que no se incluyen a sí mismos. Russell trató de solucionar esta paradoja por medio de su teoría de los tipos (lógicos), distinguiendo diferentes niveles de lenguaje. Pero la solución que propuso trajo consigo nuevos problemas, pues entrañaba la aceptación del "axioma de reducibilidad" que implicaba más problemas de los que solucionaba.

David Hilbert y la escuela formalista trataron de evitar los problemas del logicismo por medio de una teoría rigurosa de la prueba (metamatemática) que permitiría demostrar, de manera absoluta, la consistencia de los sistemas formales o axiomatizados,[6] para así terminar, de una vez por todas, con el problema de los fundamentos de las matemáticas.

Pero el programa formalista también sufrió un revés. Gödel, en 1931, demostró que ningún sistema formal suficientemente interesante para expresar la aritmética elemental puede ser axiomatizado de un modo a la vez completo y consistente, es decir, el intento por derivar todos los teoremas de los axiomas para alcanzar la completud conlleva el surgimiento de contradicciones en el sistema, y el intento por alcanzar la consistencia deja algunos teoremas sin probar. Todo sistema puede ser probado a través de otro más potente, no obstante, en este nuevo sistema siempre se llega al mismo problema que en el anterior.

Se llegó, pues, a la conclusión de que las matemáticas no son infalibles y que se puede saber, por métodos informales, cuasi-empíricos, que algunas fórmulas son verdaderas, mas no por métodos formales.

EL CUASI-EMPIRISMO EN LA FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS

El fracaso del fundacionismo permitió el seguimiento de programas no fundacionistas en la filosofía de las matemáticas, según los cuales las matemáticas no necesitan fundamentos, no los pueden tener ni la filosofía puede ofrecérselos, y que, además, sostienen que las matemáticas no son radicalmente diferentes a las ciencias empíricas y al resto de actividades humanas, sino que pueden y deben ser entendidas y explicadas en términos parecidos a ellas: son *cuasi*-empíricas.

Aclaremos, el cuasi-empirismo no plantea que las matemáticas son idénticas a las ciencias empíricas, que no existe alguna diferencia entre ellas o que sus diferencias son insignificantes, sino que el conocimiento que proporcionan es también falible y que los métodos que emplean son semejantes a los de esas ciencias.

El cuasi-empirismo tampoco es un empirismo ingenuo que considera que puede haber observaciones puras, libres de toda teoría o que las matemáticas son el resultado de generalizaciones que se realizan a partir de observaciones empíricas.

Por el contrario, el cuasi-empirismo parte del cuestionamiento que la filosofía posempirista o pospositivista (de Popper, Hanson y Kuhn entre otros) hizo en contra del empirismo o positivismo lógico, es decir, supone las tesis del holismo, la infradeterminación de las teorías, así como los giros pragmático, sociológico e historicista.

Por ello, el cuasi-empirismo postula que para entender y explicar las matemáticas no basta con analizar su estructura lógica ni su lenguaje sino que hay que estudiar su práctica real, la manera en que efectivamente las aplican los matemáticos, las enseñan los profesores y las aprenden los estudiantes, su historia, las revoluciones que ocurren en ellas, los paradigmas y los programas que dominan, las comunidades de matemáticos, el tipo de retórica que se emplea en ellas y el papel que juega el conocimiento matemático en las distintas sociedades y culturas.

Fue en los años sesenta cuando se empezó a utilizar el término "cuasi-empirismo" para referirse a una concepción falseable y no fundacionista de las matemáticas. En concreto, Imre Lakatos y Hilary Putnam fueron los primeros en usar el término, aunque de manera diferente.

Lakatos, filósofo de origen húngaro, intentó inicialmente desarrollar una filosofía de las matemáticas dialéctica o hegeliana, pero posteriormente adoptó la metodología popperiana de las conjeturas y las refutaciones, así como algunas ideas de Pólya sobre la heurística o el descubrimiento en matemáticas.[7] Lakatos estableció que: 1) las pruebas formales son falseables por medio de las pruebas informales;[8] 2) el proceder de las matemáticas no es axiomático, como plantean los formalistas, sino basado en una sucesión de pruebas y refutaciones que sólo llegan a resultados falibles;[9] 3) el intento de proveer de fundamentos a las matemáticas conlleva un retroceso al infinito; 4) la historia de las matemáticas debe ser estudiada no a través de teorías aisladas sino de series de teorías o, mejor aún, de programas de investigación que incluyen un núcleo firme no falseable y un cinturón protector de hipótesis auxiliares que sí son falseables, pero que son modificables;[10] 5) debemos preferir no el programa matemático que esté completamente axiomatizado sino el que sea progresivo, esto es, el que permita descubrir hechos nuevos e inesperados.

La supuesta necesidad de las matemáticas, nos dice Lakatos, deriva de que nos hemos olvidado, no conocemos, o no valoramos adecuadamente el proceso de pruebas y refutaciones informales, siempre falibles, por medio del cual se llega a las pruebas formales que después dan lugar a las axiomatizaciones.[11]

Putnam, en cambio, parte de las tesis quineanas acerca del holismo de las teorías y la naturalización de la epistemología, pero también, como su maestro Reichenbach, del impacto de la física moderna en nuestra concepción de la ciencia y de la realidad.[12] En las matemáticas, según Putnam, hay un juego entre postulación, pruebas informales o cuasi-empíricas y revolución conceptual. Putnam fue el primero en reconocer que las matemáticas no son ciencias experimentales y que son más *a priori* que, por ejemplo, la física, sin embargo señala que la distinción entre lo *a priori* y lo *a posteriori* es más bien relativa:[13] que algo sea *a priori* significa, simplemente, que juega un papel fundamental en nuestra concepción del mundo o en nuestra forma de vida y que, por tanto, no estamos dispuestos a renunciar a ello.

Concretamente, la teoría de conjuntos es indispensable para la física, por ello, las entidades sobre las cuales cuantifica, a saber, los conjuntos, deben ser considerados como reales, pues no se puede aceptar el conocimiento que proporciona la física sin aceptar dichas entidades o, mejor dicho, al aceptar el conocimiento de la física, ya se ha aceptado, implícitamente, la teoría de conjuntos. Así, las matemáticas comparten el contenido empírico con las teorías físicas de las que forman parte y se modifican junto con ellas.[14]

De forma análoga a lo que pasa en el campo de las teorías empíricas, en las matemáticas hay distintas teorías rivales, algunas de las cuales han sido abandonadas por su falta de adecuación, como sucedió, según Putnam, debido al desarrollo de la mecánica cuántica:[15] se descubrió que el mundo físico no es explicable por medio de la lógica cuántica sino que es necesaria una lógica polivalente, que vaya más allá del principio de tercero excluido, del mismo modo que la geometría euclidiana fue superada por la no euclidiana.[16]

Finalmente, la antología de Thomas Tymoczko, *Nuevas direcciones en la filosofía de las matemáticas*, que incluye artículos de Lakatos y de Putnam, pero también de Pólya, Hersch y Kitcher, entre otros, en la introducción, el postfacio y las introducciones a los artículos plantea, de manera clara y más o menos sistemática, el surgimiento de una nueva filosofía de las matemáticas, el cuasi-empirismo, que constituye la alternativa frente a los callejones sin salida a los que han llegado los programas fundacionistas y establece que las matemáticas son conjeturales como las ciencias empíricas, pero, también, defiende la idea de que la filosofía de las matemáticas debería estudiar la práctica efectiva y la ciencia real, lo que ha abierto la puerta a enfoques sociológicos, etnológicos, de género, etcétera.

El cuasi-empirismo ha dado lugar a propuestas, como el "constructivismo social" de Paul Ernest[17] y el "humanismo" de Reuben Hersh[18] que difícilmente aceptarían Lakatos[19] o Putnam,[20] pues desde su perspectiva conducen al relativismo y al irracionalismo.

REFLEXIONES FINALES

Como anotamos al inicio de este trabajo, el interés por los fundamentos de las matemáticas deriva, en parte, de que tradicionalmente las matemáticas se han concebido como una ciencia especial entre todas las ciencias: un saber en el que se puede alcanzar la certeza plena y la exactitud completa. Y si en las matemáticas no se puede alcanzar, entonces ¿en dónde? Habría entonces que aceptar que todo el conocimiento humano es falible y que todas las actividades humanas también lo son.

Efectivamente, el cuasi-empirismo nos ofrece una nueva imagen de las matemáticas, pero también del conocimiento en general, del ser humano y de la cultura.[21] Sin embargo, hay que aclarar que ello no nos conduce ni tiene por qué conducirnos al escepticismo, al relativismo o al irracionalismo: no se está afirmando que no podemos estar seguros de nada, que nada puede ser probado, pues, de hecho, en las matemáticas y en la lógica sí se pueden probar muchas cosas; el problema es que dichas "pruebas" tienen límites y sólo tienen valor dentro de ciertos márgenes.

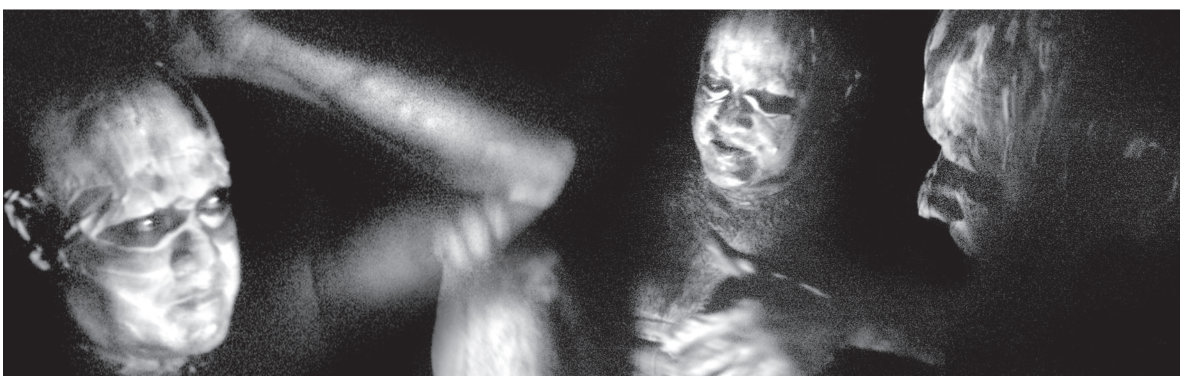
Aclaremos también que el cuasi-empirismo a pesar de su "constructivismo", no se opone ni excluye al realismo o a la idea de que existe algo independiente de nosotros ni tiene por qué reducirse o identificarse con el subjetivismo.

Por el contrario, es posible un realismo constructivista como el de Popper, según el cual las matemáticas son una creación humana: sin los seres humanos o seres como nosotros, no existirían; no obstante, una vez creadas se convierten en un mundo autónomo o con leyes propias (diferente del físico y del subjetivo o psicológico) y en el cual hay relaciones y consecuencias imprevistas, impredecibles, pero necesarias, que tenemos que descubrir e investigar.[22]

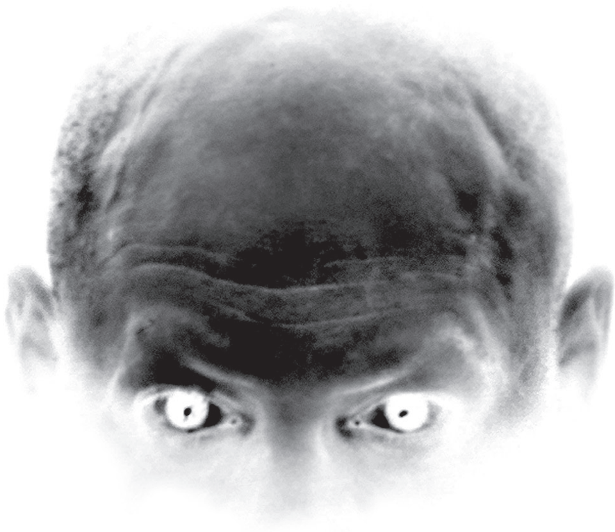
Desde luego, el cuasi-empirismo no está exento de defectos. En mi opinión, algunos de los principales son, en primer lugar, que puede dar lugar a una confusión nociva entre la investigación matemática y la filosofía e historia de las matemáticas, es decir, entre la práctica de las matemáticas y la reflexión sobre ellas.

En segundo lugar, a diferencia de los programas fundacionistas que dieron origen a importantes desarrollos técnicos dentro de las matemáticas, por ejemplo, el logicismo dio paso a un nuevo tipo de lógica, el formalismo a la metamatemática, etc., el cuasi-empirismo no lo ha hecho ni parece poder hacerlo. Es decir, en términos de Lakatos, parece, más bien, un programa regresivo o que no descubre hechos nuevos sino que sólo trata y puede dar cuenta de los hechos ya conocidos.

Sin embargo, lo anterior sólo es cierto en parte; ya que uno de los campos más interesantes y fructíferos que caracterizan al cuasi-empirismo es el estudio del papel



© **Sergio Javier González Carlos,** de la serie *Mi demonio*, 2005.



© **Sergio Javier González Carlos,** de la serie *Mi demonio*, 2005.

que juegan las computadoras en las demostraciones matemáticas.[23]

Pero la principal virtud del cuasi-empirismo es, como ya dije, que ha traído consigo un cuestionamiento de algunas dicotomías en las que descansa nuestro pensamiento (por ejemplo, lo empírico y lo formal, lo analítico y lo sintético, lo *a priori* y lo *a posteriori*, el descubrimiento y la justificación, etc.) que suelen ser aceptadas como si fueran universales, necesarias y hasta eternas, con lo cual nos obliga a revisar nuestra concepción del conocimiento, de la realidad y de nosotros mismos.

B I B L I O G R A F Í A

Ayer AJ. *Language, truth and logic*, Dover Publications, New York, s/f (*Lenguaje, verdad y lógica*, Martínez Roca, Madrid (1970)).

Baker SF. *Philosophy of mathematics*, Prentice Hall, New Jersey (1964).

Benacerraf P y Putnam H (edit.). *Philosophy of mathematics. Selected readings*, Cambridge University Press (1998).

Bloor D. *Conocimiento e imaginario social*, Gedisa, Barcelona (1998).

Carnap R. "The logicist foundations of Mathematics" en Benacerraf P y Putnam H, *op. cit*.

Davis PJ y Hersh R. *The mathematical experience*, Editorial Houghton Mifflin Company, New York (1998).

Dou A. *Fundamentos de la matemática*, Labor, Barcelona (1970).

Ernest P. *Social constructivism as a philosophy of mathematics*, State University of New York Press (1998).

Euclides. *Elementos*. Libros I-IV, Gredos, Madrid (2000).

Eves H. *Foundations and fundamental concepts of mathematics*, Dover Publications, New York (1990).

Frege G. *Escritos filosóficos*, Cátedra, Barcelona (1996).

—. *Conceptografía. Los fundamentos de la aritmética. Otros estudios filosóficos*, UNAM, México (1972).

Garciadiego Dantan AR. *Bertrand Russell y los orígenes de las "paradojas" de la teoría de conjuntos*, Alianza Editorial, Madrid (1992).

Garrido J. *Verdad matemática*, Nivola, España (2003).

George A y Velleman DJ, *Philosophies of mathematics*, Blackwell publishers, Oxford (2002).

Hahn H. "Lógica, matemática y conocimiento de la naturaleza" en Ayer AJ. *El positivismo lógico*, FCE, México (1981).

Hersh R. *What is mathematics, really?*, Oxford University Press, New York (1997).

Hilbert D. *Fundamentos de las matemáticas*, UNAM, México (1993).

Holf Kjeldsen T y otros, *New trends in the history and philosophy of mathematics*, Universitary Press of Southern Denmark (2004).

Hume D. *Tratado de la naturaleza humana*, Editora Nacional, Madrid (1981).

Kant I. *Tratado de lógica*, Editora Nacional, México (1972).

—. *Crítica de la razón pura*, Alfaguara, Madrid (1995).

Kline M. *Matemáticas. La pérdida de la certidumbre*, Siglo XXI, México (1985).

Körner S. *Introducción a la filosofía de las matemáticas*, Siglo XXI, México (1967).

Lakatos I. *La metodología de los programas de investigación científica*, Alianza Editorial, Madrid (1998).

—. *Matemáticas, ciencia y epistemología*, Alianza Editorial, Madrid (1987).

—. *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*, Alianza Editorial, Madrid (1994).

Larvor B. *Lakatos. An introduction*, Routledge, Londres (1998).

Laudan L. *Ciencia y relativismo*, Alianza Editorial, Madrid (1993).

—. "The sins of the fathers. Positivist origins of post-positivist relativism" en *Beyond positivism and relativism. Theory, method and evidence*, Westview, Colorado (1996).

Levi B. *Leyendo a Euclides*, Zorzal, Buenos Aires (2001).

Navarro J. *La nueva matemática*, Salvat, Barcelona (1973).

Nagel E y Newman JR, *El teorema de Gödel*, CONACYT, México (1981).

Poincaré H. *Filosofía de la ciencia*, CONACYT, México (1984).

Popper KR. *Conocimiento objetivo*, Tecnos, Madrid (1988).

—. *La lógica de la investigación científica*, REI-Tecnos, México (1990).

—. *Conjeturas y refutaciones*, Paidós, Barcelona (1991).

—. *Búsqueda sin término. Una autobiografía intelectual*, Tecnos, Madrid (1994).

—. *Realismo y el objetivo de la ciencia*. Post-scriptum a *La lógica de la investigación científica*, v. I, Tecnos, Madrid (1995).

—. *En busca de un mundo mejor*, Paidós, Barcelona (1994).

—. *La responsabilidad de vivir. Escritos sobre política, historia y conocimiento*, Paidós, Barcelona, 1995.

—. “Reply to my critics” en *The philosophy of Karl Popper*, v. 2., Open Court, La Salle, Illinois (1974).
—. *Los dos problemas fundamentales de la metafísica*. Basado en manuscritos de los años 1930-1933, Tecnos, Madrid (1998).
Popper RK y Eccles J. *El yo y su cerebro*, Labor, Barcelona (1985).
Putnam H. *Mathematics, matter and method*. Philosophical papers volume 1, Cambridge University Press (1979).
—. *Lo analítico y lo sintético*, Cuadernos de Crítica 24, UNAM-IIF, México (1983).
—. *Razón, verdad e historia*, Tecnos, Madrid (1988).
Quine WV. *From a logical point of view*, Harper Torchbooks, New York (1961). (*Desde un punto de vista lógico*, Paidós, Barcelona (2002)).
—. *Filosofía de la lógica*, Alianza Editorial, Madrid (1977).
—. *Selected logic papers*, Harvard University Press (1995).
Rorty R. *La filosofía y el espejo de la naturaleza*, Cátedra, Madrid (1989).
Russell B. *Misticismo y lógica y otros ensayos*, Edhasa, Barcelona (2001).
—. *Los principios de la matemática*, Espasa-Calpe, Madrid (1977).
—. *Introducción a la filosofía matemática*, Paidós, Barcelona (1998).
—. *Análisis filosófico*, Paidós, Barcelona (1999).
Segura LF. *La prehistoria del logicismo*, UAM-I y Plaza y Valdés, México (2001).
Shanker S (edit.). *Philosophy of science, logic and mathematics in the twentieth century*, Editorial Routledge, New York (1996).
Shapiro S. *Thinking about mathematics. The philosophy of mathematics*, Oxford University Press (2000).
—. *Foundations without foundationalism. A case for second-order logic*, Clarendon Press, Oxford (1991).
Stove D. *El culto a Platón y otras locuras filosóficas*, Editorial Cátedra, Madrid (1993).
Tymoczko T. *New directions in the philosophy of mathematics*, Princeton University Press, New Jersey (1988).
Wittgenstein L. *Remarks on the foundations of mathematics*, Edición revisada, The mit Press, Cambridge (1996). (*Observaciones sobre los fundamentos de las matemáticas*, Alianza Editorial, Madrid (1978)).
—. *Tractatus logico-philosophicus*, Alianza Editorial, Madrid (1994).
—. *Investigaciones filosóficas*, UNAM-Crítica, Barcelona (1988).

N O T A S

[1] El carácter que normalmente se le atribuye a las matemáticas queda expresado en frases como “tan cierto como 2 más 2 es 4”, “si Pitágoras no se equivoca, entonces…”.

[2] Recordemos, por ejemplo, la ética de Spinoza *al more geometrico*.

[3] Euclides, Libro I, *Elementos*, 15-16.

[4] Proclo, *Com*. 191, 21 ss.

[5] Esta es la nueva concepción de axioma que asumió el enfoque formalista de David Hilbert. Véase *Los fundamentos de la aritmética*. Curiosamente, Frege, el padre de la lógica moderna, tenía una concepción todavía tradicional de los sistemas axiomáticos. Véanse sus escritos sobre los fundamentos de la geometría incluidos en *Escritos filosóficos*, *op. cit.*, así como el capítulo dedicado a Frege en el libro de Jesús Mosterín, *Los lógicos*.

[6] Las pruebas “absolutas” de consistencia son las que permiten demostrar la consistencia de un sistema sin dar por supuesta la consistencia de otro sistema, en concreto, deberían permitir demostrar, a través de métodos finitistas, la imposibilidad de derivar ciertas fórmulas contradictorias. Lo que se busca es descubrir una fórmula que no sea un teorema, pues si pudiese derivarse cualquier fórmula de los axiomas, entonces ésto probaría que éstos son contradictorios (de una contradicción se sigue cualquier cosa). Véase *El teorema de Gödel* de Nagel y Newman.

[7] Por ejemplo, en *How to solve it*.

[8] “¿Existe un renacimiento del empirismo en la reciente filosofía de las matemáticas?”, así como en “¿Qué es lo que prueba una prueba matemática?” en *Matemáticas, ciencia y epistemología*.

[9] *Pruebas y refutaciones*, un libro que fue publicado póstumamente con base en la tesis de doctorado de Lakatos (1961) y algunos artículos publicados entre 1963 y 1964.

[10] *Metodología de los programas de investigación científica*.

[11] En la segunda parte de “El método de análisis-síntesis” (1973). En la parte final de *Pruebas y refutaciones* también presenta una teoría de cómo se pasa de las matemáticas a la lógica.

[12] “The logic of quantum mechanics”, *Mathematics, matter and method*.

[13] “What is mathematical true?”, *Mathematics, matter and method*.

[14] “Philosophy of logic?”, *Mathematics, matter and method*.

[15] Lo anterior es debido al principio de indeterminación (o, desde el punto subjetivo, incertidumbre) de Heisenberg.

[16] En “Philosophy of logic?” Putnam señala que es casi imposible distinguir entre las matemáticas y la lógica.

[17] *Social constructivism as philosphy of mathematics*.

[18] *What is mathematics, really?*

[19] Recuérdense las críticas de Lakatos en contra de Kuhn y Feyerabend debido a su supuesto psicologismo y sociologismo relativista, así como su distinción entre la historia interna (la verdaderamente importante) y la externa de la ciencia.

[20] En *Razón, verdad e historia* Putnam hace una crítica de Kuhn y Feyerabend y, en general, a todas las posturas sociologistas e historicistas; durante un tiempo asumió un “realismo externo” y hasta cierto reduccionismo funcionalista (que a mediados de los años setentas criticó y abandonó por completo) y propuso una especie de nueva fundamentación de las matemáticas por medio de la lógica modal (según la cual las matemáticas no tratan tanto de realidades sino de potencialidades), etc., debido a lo cual muchos seguidores del cuasi-empirismo no lo incluyen dentro de la nueva filosofía de las matemáticas.

[21] También hay que señalar que el cuasi-empirismo tiene consecuencias fundamentales para la enseñanza y el estudio de las matemáticas, y que ha dado lugar a una concepción constructivista (que encuentra su base en la psicología cognitiva), opuesta a las llamadas “matemáticas modernas”, ligadas a los proyectos fundacionistas (que condujeron a la enseñanza de la teoría de conjuntos en la primaria).

[22] La necesidad de las matemáticas, nos dice Popper, deriva de un hecho sociológico simple, a saber, que todas las acciones tienen consecuencias imprevisibles, y a veces indeseables, pero inevitables. Véase “El conocimiento y la configuración de la realidad” en *En busca de un mundo mejor*, 40-45; “Epistemología sin sujeto cognoscente” en *Conocimiento objetivo*, 126-135; “Observaciones de un realista sobre el problema mente-cuerpo” en *La responsabilidad de vivir*, 83-88; *El universo abierto. Un argumento a favor del indeterminismo*, 140-143 y *El yo y su cerebro*, 41-54.

[23] Véase la sección “Computers and mathematical practice: A case study” en la antología de Tymozcko.

Eduardo Harada Olivares, profesor de la Escuela Nacional Preparatoria, UNAM. edharada@hotmail.com