Acerca de la importancia histórica de GÖDEL

Luis
Estrada González

Al Seminario de Lógica y Filosofía del Lenguaje
de la Facultad de Filosofía y Letras -BUAP

La historia de la lógica tiene como sus grandes pilares a Aristóteles, a Gottlob Frege y a Kurt Gödel. Aristóteles es importante para la lógica por haber sido el primero en haberla estudiado independientemente de otras disciplinas, llevándola a una sistematicidad tal que dejó vigente su obra por varios siglos; Frege inició la lógica contemporánea, dando muchos pasos más allá de Aristóteles; Gödel será recordado sobre todo por haber demostrado cuáles son los alcances de la lógica, que no son pocos.

Así como la física celebró en 2005 su año internacional conmemorando los cien años de la publicación de los trabajos fundamentales de Einstein acerca de la teoría de la relatividad, quizá en 2031 se celebre el Año Internacional de la Lógica al cumplirse un siglo de la publicación del que probablemente sea el artículo más importante en la historia de la lógica, el "*Über Unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*" de Kurt Gödel. Pero en lo que llega tal fecha, el 28 de abril de este 2006 se cumplió el centenario del natalicio de Gödel, lo cual es un excelente pretexto para decir algunas palabras acerca de la obra de este lógico, matemático y filósofo norteamericano de origen austriaco.

LA LÓGICA Y LA FUNDAMENTACIÓN DE LA MATEMÁTICA

La lógica había llegado a un desarrollo impresionante después de las obras de Frege, Russell y Whitehead, a los cuales se habían añadido los trabajos de Herbrand, Skolem y Löwenheim. Sin embargo, había cuestiones acerca de los sistemas lógicos que aún no habían sido planteadas: ¿los sistemas lógicos son completos, es decir, bastan los axiomas del sistema para derivar cualquier fórmula verdadera? ¿Son consistentes?, es decir, ¿de sus axiomas no pueden obtenerse fórmulas contradictorias? Hilbert y Ackermann plantean estas preguntas, sin resolverlas, en sus *Grundzüge der theoretischen Logik* de 1928. Gödel examinó estas cuestiones y en 1930 demostró que el cálculo proposicional clásico es a la vez completo y consistente, esto es, que en la lógica proposicional toda fórmula verdadera es teorema y todo teorema es verdadero bajo cualquier interpretación. En ese mismo año dedica algunos trabajos al *Entscheidungsproblem*, es decir, al problema de cómo saber si las fórmulas del cálculo cuantificacional son satisfacibles o no, o lo que es lo mismo, si el cálculo cuantificacional es completo. A grandes rasgos, se dice que una fórmula es satisfacible si y sólo si la fórmula tiene al menos una interpretación verdadera. Gödel demostró que ciertas clases de fórmulas sí son satisfacibles, aunque Church en 1936 evidenció que en general no hay un método de decisión. En 1931 Gödel probó que el cálculo cuantificacional de orden superior, el sistema en el cual se representa la aritmética, no puede ser a la vez consistente y completo. Lo que hace Gödel es representar en el lenguaje de la aritmética elemental una fórmula que dice “soy indemostrable”. Esto implica un problema mayúsculo, pues si la fórmula es demostrable, entonces es falsa; pero en consecuencia el sistema estaría demostrando cosas falsas: sería inconsistente. Si es, como dice, indemostrable, entonces es verdadera y no podría ser demostrada en el sistema: el sistema sería incompleto. Por ello, la aritmética o es consistente, o es completa, mas no ambas cosas a la vez. Puesto que un sistema inconsistente (trivial) es inservible, la única opción viable es que sea incompleta.

Gödel comprobó también que ningún sistema que sirva para representar a la aritmética puede demostrar su propia consistencia. Esto no es tan devastador pues, como dice Smullyan haciendo mofa de los catastrofistas, confiar en la consistencia de un sistema porque él mismo afirma su consistencia es tan ingenuo como confiar en la veracidad de una persona sólo porque ella misma dice que nunca miente. Como es sabido, si el sistema es contradictorio puede afirmar cualquier cosa (es trivial), así que también puede afirmar su propia consistencia. Ni Hilbert ni otros matemáticos habían esperado que un sistema pudiera demostrar su propia consistencia, aunque los teoremas de Gödel sirvieron para poner más restricciones de las que originalmente se habían planteado. Después de eso se han intentado pruebas de consistencia, siendo la de Gentzen en 1936 la más famosa, aunque los matemáticos nunca han estado del todo satisfechos con ella.

GÖDEL Y LA TEORÍA DE CONJUNTOS

Precisamente Gödel es asociado con los teoremas limitativos de la lógica clásica, aquellos que dicen que cualquier sistema lo suficientemente fuerte como para simbolizar a la aritmética ha de ser o completo, o consistente, pero no ambos, y que ningún sistema con las características señaladas puede demostrar su propia consistencia. Sin embargo, si se atiende al número de trabajos y de páginas, el gran problema de Gödel no era la incompleción de la aritmética ni la decidibilidad de la lógica, sino el problema del continuo de Cantor, al que le dedicó la tercera parte de su obra, tres artículos entre 1938 y 1940, y otro en 1947: “La consistencia del axioma de elección y la hipótesis generalizada del continuo”, 1938; “Prueba de consistencia para la hipótesis generalizada del continuo”, 1939; “La consistencia del axioma de elección y de la hipótesis generalizada del continuo con los axiomas de la teoría de conjuntos”, 1940; y “¿Qué es el problema del continuo de Cantor?”, de 1947. En el artículo de 1940, Gödel demostró que la hipótesis del continuo y el axioma de elección son consistentes con la teoría de conjuntos si el resto de los axiomas son compatibles entre sí. Es decir, la hipótesis del continuo no contradice ningún axioma ni teorema de la teoría de conjuntos, mas tampoco se sigue de ellos.

Cuando Joseph Cohen demostró en 1963 la indecidibilidad de la hipótesis del continuo reconoció que su demostración era posible porque en realidad “Gödel ya había hecho la mayor parte del trabajo”. En efecto, dado que Gödel demostró que la hipótesis del continuo es compatible con la teoría de conjuntos pero no se sigue de ella, sólo restaba probar que la negación de la hipó-

© **Andenes, ca. 1980.** Fondo *Ferronales*. CONACULTA/CNPPCF/MNFM.

tesis del continuo también es compatible con la teoría de conjuntos y que tampoco puede derivarse de ella.

EL TRABAJO DE GÖDEL EN LA LÓGICA INTUICIONISTA

Otro de los intereses de Gödel estaba en la lógica intuicionista. La lógica intuicionista es una lógica divergente de la lógica clásica en una aspecto específico, a saber, la demostración matemática. Mientras que en lógica clásica es posible pasar de una doble negación a una afirmación, esto no es posible en la lógica intuicionista, pues parece que no es una demostración genuina decir "si supongo la inexistencia de x entonces llego a una contradicción, por tanto, x existe (o tiene tal propiedad)". Gödel dedica a la lógica intuicionista cuatro trabajos, tres en 1932 y uno más en 1958. El primero, titulado "Sobre el cálculo conectivo intuicionista" trata del asunto de las tablas de verdad para la lógica (proposicional) intuicionista. El resultado al que llega es que no es posible construir una matriz finita de valores de verdad tal que hiciera de la lógica intuicionista una lógica polivalente completa, es decir, que de haber una matriz multivaluada sería infinita. Como es sabido, hay sistemas de lógica en los que al parecer hay otros valores de verdad además de "verdadero" y "falso"; lo que Gödel probó es que en la lógica intuicionista habría infinitos valores de verdad y la asignación de estos valores a las fórmulas no podría hacerse como puede hacerse en las que tienen dos, tres o cualquier número finito de valores. En el segundo, "Una interpretación del cálculo conectivo intuicionista", Gödel demuestra que la lógica intuicionista puede convertirse, mediante ciertas definiciones, en el sistema de lógica modal S4. Los sistemas de lógica modal son extensiones de la lógica proposicional y cuantificacional en los que se trabaja con operadores de posibilidad y de necesidad. Hay muchos de esos sistemas; algunos de los más conocidos son T, S4 y S5 ("S" sólo quiere decir "sistema") y entre ellos hay un orden de potencia demostrativa: S5 es el más poderoso deductivamente, ya que puede probar teoremas que no pueden probarse en los demás. Gödel produjo una traducción de la lógica intuicionista siguiendo un sencillo razonamiento: en el caso de la aritmética (hay que recordar que la lógica intuicionista quiere representar de manera fiel el razonamiento matemático) las fórmulas verdaderas son necesariamente verdaderas y las falsas son imposibles. Gödel demostró que el sistema modal S4 representa los rasgos modales de necesidad y de imposibilidad que parece haber entre las fórmulas aritméticas tal y como las entiende la lógica intuicionista.

"Sobre la teoría de números y la aritmética intuicionista", el tercer trabajo de Gödel dedicado al intuicionismo, es quizá el más importante de todos. En él Gödel demuestra dos cosas realmente importantes. La primera es que la lógica intuicionista es un subsistema de la lógica clásica cuando se consideran todas las conectivas y que la lógica clásica es un subsistema de la lógica intuicionista cuando todos los teoremas de la lógica clásica se escriben únicamente en términos de negaciones y conjunciones. La otra demostración dice que la totalidad de la aritmética formal clásica puede incluirse en la aritmética intuicionista o, dicho de otra manera, todas las afirmaciones de la aritmética clásica son también afirmaciones de la aritmética intuicionista. Para ello traduce convenientemente todos los símbolos de la aritmética clásica (en la formulación de Herbrand) a los de la aritmética intuicionista (en la formulación de Heyting) y demuestra que ambas aritméticas son equivalentes. De esta demostración pueden extraerse un par de conclusiones notables. Primero, la demostración de que todo teorema (traducido) de la aritmética clásica es también un teorema de la aritmética intuicionista proporciona de pasada una prueba relativa de consistencia de la aritmética clásica respecto de la aritmética intuicionista. Cualquier contradicción de la aritmética clásica sería trasladable a la intuicionista, es decir, si la aritmética clásica fuera contradictoria también lo sería la intuicionista, por lo que si la aritmética intuicionista es consistente, *ipso facto* la aritmética clásica también lo es. Segundo, de acuerdo con esto la lógica intuicionista sólo daría lugar a restricciones genuinas en el análisis numérico y en la teoría de conjuntos, mas no en la aritmética.

En el cuarto trabajo, "Acerca de una ampliación todavía no utilizada desde el punto de vista finitista", da otra interpretación efectiva de la lógica intuicionista, esta vez en términos de funciones recursivas. En ese trabajo Gödel analiza las relaciones entre el método finitista, que básicamente es el método que dice que las demostraciones deben consistir en un número finito de pasos, esto es, no deben admitirse pruebas que consten de infinitos o que no puedan reproducirse en un número finito de pasos, y la lógica intuicionista y, más exactamente, la aritmética intuicionista. La idea de Gödel es que puede avanzarse mucho más en las pruebas de consistencia trabajando directamente la aritmética en el sentido intuicionista (aunque las aritméticas clásica e intuicionista sean equivalentes, como Gödel mismo probó, la intuicionista tendría la ventaja de trabajar con una noción de "prueba" más adecuada.)

LA FILOSOFÍA GÖDELIANA

Gödel tardó mucho tiempo en manifestar sus particulares opiniones filosóficas. Particulares porque muchas

© **Vendedoras en el andén, ca. 1970.** Fondo *Ferronales*. CONACULTA/CNPPCF/MNFM

parecen más argumentos cartesianos que las ideas de un matemático del siglo XX; sin duda su gran interlocutor podría haber sido Leibniz. Sus contribuciones más importantes a la filosofía son su defensa del realismo platónico y sus argumentos en favor del dualismo en el problema mente-cuerpo. Comenzaré por esto último.

Puesto que todavía busca hacerse una distinción entre las máquinas y los humanos y dado que las actividades "rigurosas" que distinguían a los inteligentes (jugar ajedrez, realizar operaciones matemáticas e inferencias lógicas a gran velocidad) también son hechas y de mejor manera por los ordenadores, resultaría que las máquinas son más inteligentes que los humanos. Pero, arguyen algunos, lo que no pueden hacer los ordenadores son las actividades cotidianas: caminar, conversar, portarse bien en las fiestas, reconocer a sus familiares… Entonces parece que el rasgo distintivo de la inteligencia es el sentido común.

Sin embargo, hay otra vertiente de la discusión, precisamente la de algunos matemáticos quienes dicen que una máquina nunca podrá igualar a un humano en conocimiento matemático y que es precisamente ese aspecto en el cual puede insistirse para hacer una distinción entre humanos y máquinas. Muchos autores, entre ellos Descartes, Gödel, Lucas y más recientemente Penrose han utilizado argumentos similares para demostrar el carácter no espacio-temporal de la mente. Lo que tienen en común todos estos argumentos es la siguiente estructura:

1. Si nuestra mente fuera (o pudiera ser reproducida por) un dispositivo espacio-temporal y, en este sentido, asimilarse a una máquina finita de Turing, sólo podríamos reconocer como verdaderos aquellos teoremas producidos directamente por tal máquina;

2. podemos reconocer algunas verdades que no podría producir una máquina de Turing finita,

3. por tanto, nuestra mente no es y no puede reducirse a un dispositivo espacio-temporal.

Ello permitiría distinguir entre la "efectividad" (la rapidez para calcular) y el "conocimiento matemático" (la capacidad de generar conocimiento, en algunos casos no formalizable). No discutiré aquí si el argumento es válido o tan concluyente como suele pensarse.

El platonismo en general afirma que (a) existen los objetos matemáticos, no son espacio-temporales y existen independientemente de nosotros, y (b) nuestras teorías describen tales objetos. Pero si los seres humanos existen enteramente en forma espacio-temporal, entonces no podrían tener conocimientos matemáticos porque no podrían tener contacto con los objetos abstractos no espacio-temporales. La defensa del realismo platónico por parte de Gödel depende del argumento en favor del dualismo, pues como se vio líneas más arribas, él defiende la idea del dualismo precisamente a partir de que podemos reconocer verdades matemáticas que ningún sistema físico podría conocer.

LA APORTACIÓN DE GÖDEL A LA FÍSICA TEÓRICA

En 1949 se publicó el libro *Albert Einstein: Philosopher-Scientist* dentro de la serie The Library of Living Philosophers. Gödel participó con un ensayo titulado "Algunas observaciones acerca de la relación entre la teoría de la relatividad y la filosofía idealista". En él Gödel hace una evaluación de la filosofía kantiana contraponiéndola a la física relativista. Pero, además de eso, Gödel desarrolla de manera informal en ese artículo una sugerencia para solucionar las ecuaciones de campo de Einstein. El sustento matemático de dicha idea lo publicaría meses después en el trabajo "Un ejemplo de un nuevo tipo de soluciones cosmológicas a las ecuaciones de campo de gravitación de Einstein".

Lo valioso de este trabajo de Gödel no reside en sus aplicaciones prácticas, porque para que pudiera tenerlas habría que mover cuerpos a velocidades cercanas a la de la luz utilizando cantidades ingentes de masa convertida en energía para impulsarlos, sino en el propio andamiaje matemático y en las consecuencias que pueden extraerse de él, sobre todo la discusión teórica tanto física como filosófica de la abolición de la distinción "antes-después" y con ello la posibilidad de interactuar con el pasado. En 1950 escribe "Acerca de los universos rotatorios en la teoría de la relatividad general", otro trabajo en el que aborda nuevamente la teoría de la relatividad, desarrollando y puntualizando algunas opiniones desarrolladas en los dos escritos anteriores, enfatizando en las posibilidades de discusión entre la física y la filosofía.

NOTAS FINALES

La importancia histórica de Gödel radica en la variedad de sus intereses, en la profundidad de su trabajo y de sus resultados. La importancia histórica de los trabajos de Gödel puede entenderse si se compara el volumen de su obra entera (no más de mil páginas) con la cantidad de páginas que se han escrito acerca de ella. Pero sobre todo, la gente importante puede medirse por la motivación que deja en las nuevas generaciones. Ante la "negatividad" de la mayoría de sus trabajos más reconocidos podría pensarse que no hay mucha motivación, pues Gödel habría cerrado todos los caminos. Pero ha sucedido precisamente lo contrario, ya que las nuevas generaciones de lógicos, matemáticos y filósofos han tratado o de extender los teoremas de Gödel o de sacarles la vuelta de alguna manera. El mayor legado que pudo haber dejado es una marca de genialidad que debe ser el estándar para las nuevas generaciones, una genialidad que debe ser emulada y, por qué no, superada, para que las ciencias deductivas se enriquezcan con más grandes pilares al lado de Aristóteles, Frege y Gödel.

BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

Gödel K. *Collected Works*. Oxford University Press, New York, (1990-1995) tres volúmenes.

Cardona Suárez CA. Algunas implicaciones filosóficas del trabajo de Kurt Gödel, *Diánoia* (2004) 23-50.

Téllez Nieto O. Matemáticas, relatividad y filosofía kantiana. *Ciencias*, Revista de difusión de la Facultad de Ciencias de la UNAM, octubre-diciembre (2005) 54-59.

Luis Estrada González, Instituto de Investigaciones Filosóficas, UNAM.
lestrada@minerva.filosoficas.unam.mx