Viaje al INFINITO

Miguel Antonio
Jiménez Pozo

Preste atención. Entre dos números naturales consecutivos arbitrarios *n* y *n+1*, hay infinitos números racionales positivos (es decir, fraccionarios, de la forma *p/q*); sin embargo, hay la misma cantidad (o cardinal) de números naturales que de números racionales. Por otra parte, entre dos números racionales distintos y arbitrariamente seleccionados, hay siempre un número irracional (o sea, números como raíz cuadrada de 2 o el famoso *pi*). Igualmente, entre dos números irracionales distintos y arbitrariamente seleccionados, hay siempre un número racional; ¡pero la cantidad de números irracionales es infinitamente superior a la de los números racionales!

Cuando yo era estudiante de la licenciatura en matemáticas empleé mucho tiempo tratando de determinar si en las afirmaciones antes mencionadas había algo chueco y trataba afanosamente de detectar algún error en las demostraciones. Claro que desde varios puntos de vista es cuestionable esa actitud de desconfianza de un alumno hacia sus profesores; pero de todas formas indica cuán profundamente sorprendido debía encontrarme ante tal aparente contradicción lógica.

No es menester demostrar aquí la validez de los resultados enunciados, porque pueden encontrarse en casi cualquier libro elemental de teoría de conjuntos y porque no deseamos llenar la cabeza del lector tan tempranamente con definiciones matemáticas y razonamientos abstractos. Eso sí, indicaremos cualitativamente lo

© **Locomotora de vapor en reparación, taller mecánico de Buenavista, 1926.** Fondo *Comisión de Avalúo e Inventarios*. CONACULTA/CNPPCF/MNFM.

que sucede. En matemáticas hay diferentes niveles del infinito. *Grosso modo*, hay conjuntos que tienen infinitamente más elementos que otros. Quiere decir que hay infinitos de diferentes órdenes. Un famoso teorema de Cantor establece que por infinito que sea un conjunto, habrá siempre otro de un infinito superior de elementos. Se infiere que hay una infinidad de órdenes de infinito y que no puede existir el conjunto de todos los conjuntos. ¿Y qué sucede cualitativamente? Es conveniente auxiliarse de la ley filosófica de los saltos cuantitativos en cualitativos. En los conjuntos infinitos hay tantos elementos, que suceden cosas cualitativamente diferentes a los universos finitos a los que estamos acostumbrados, como por ejemplo, que una parte puede ser igual al todo. Claro que eso no nos permite intuir los fenómenos que ocurren, pero al menos nos explica por qué no los entendemos, por qué nos parecen ilógicos. Y eso, por lo menos, nos deja más tranquilos.

Aunque podríamos llenar hojas y hojas de ejemplos diferentes e igualmente sorprendentes relacionados con el infinito matemático, desearíamos concentrarnos en uno de los axiomas más conflictivos de la matemática y su consecuencia en algo aparentemente tan intuitivo como la asignación de longitudes, áreas y volúmenes a las diferentes figuras geométricas. Hablamos del endemoniado axioma de elección o de selección, que aplicado a conjuntos infinitos provoca impredecibles consecuencias como el teorema de Cantor mencionado con antelación.

Seguramente nadie podrá saber con precisión cómo pensaba el hombre primitivo, si es que llegásemos a determinar cuándo comenzó a pensar. Pero parece muy lógico que tuvo necesidad de desarrollar el lenguaje y el pensamiento simultáneamente y que en ellos iba incluida la concepción de contar, de medir longitudes, áreas y volúmenes, de estimar el peso de los cuerpos y de algo sumamente sutil, que es la idea de orden. Pensándolo bien, algunas de estas manifestaciones están presentes incluso en los animales. Si un pez es grande, el pequeño de alguna manera lo mide, se asusta y huye. Estas ideas de medición, de orden y la de identificar algunas formas geométricas, quizás relacionadas en principio con manifestaciones artísticas como la pintura rupestre, tienen que haber sido el germen de lo que hoy es la matemática. Y sin extendernos por razones obvias, quisiéramos mencionar que el concepto de orden es mucho más complejo de lo que en principio uno pueda imaginarse. En conjuntos infinitos, por ejemplo, tomemos los números naturales con su orden usual, en el cual sabemos la posición de cada elemento. Si ahora castigamos al 1 y lo mandamos al final de la fila, ese elemento no sabría detrás de qué elemento ubicarse. En conjuntos finitos, cantidad y orden parecerían que sí van de la mano y en la práctica, al tomar un turno en una fila, nos entregan un número que no representa una cantidad sino un orden. Pero todo va bien hasta un punto. La etnomatemática, que estudia más o menos las capacidades matemáticas humanas vinculadas a orígenes étnicos, nos ha revelado ciertos problemas un tanto incomprensibles. Por ejemplo, hemos sabido de tribus de indios ya desaparecidas de los Estados Unidos, donde el lenguaje que habían desarrollado no les permitía expresar, digamos, diez días, pues los días tenían una interpretación secuencial, de orden y no de cantidad. O tribus australianas que no sabían contar más allá del tres o del cuatro; pero a sus hijos, hasta diez, los diferenciaban asignándoles en el nombre el orden de nacimiento.

Dando un salto histórico muy grande, desde los orígenes del hombre llegaremos a las civilizaciones antiguas, en las cuales como una continuación avanzada de las ideas primitivas, nadie ponía en duda la propiedad de las diferentes figuras geométricas de poseer una cierta longitud, área o volumen, según fueran unidimensionales, planas o espaciales. El único problema era calcular estas magnitudes, lo que se realizaba, de ser posible, por el método de comparar cuántas veces cabe una unidad o patrón en la figura considerada. Por respeto y admiración no puedo obviar mencionar a Arquímedes como personaje emblemático de este período, quien hace tres mil años era capaz de calcular, por ejemplo, el área bajo una parábola. Sencillamente no pudo inventar en aquella época el cálculo integral por la misma razón de que no se podía inventar la televisión actual sin haberse descubierto antes la luz eléctrica.

En este período histórico nos encontramos con lo que quizás fuese la primera gran sorpresa relacionada con la infinitud de los números. El teorema de Pitágoras establece que si tenemos un triángulo rectángulo cuyos catetos tienen longitud 1, entonces la hipotenusa tiene longitud raíz cuadrada de 2. Por otra parte, los antiguos griegos eran demasiado listos para ignorar que no existe un número racional cuyo cuadrado sea 2. Así las cosas, hay anécdotas que cuentan que Pitágoras anduvo como loco mucho tiempo pues no podía descubrir el origen de la contradicción entre ambos resultados. Cuentan también que después de mucho tiempo, los griegos llegaron a la conclusión de que en realidad no había contradicción sino que habían descubierto la existencia de segmentos que no podían medirse y a los que llamaron inconmesurables, es decir, con una longitud irracional y lo celebraron con un gran festín para el cual sacrificaron muchos bueyes.

Demos otro salto histórico y ubiquémosnos en la primera mitad del pasado siglo XX. No sólo disponíamos ya de una clara tendencia a la unificación de las diferentes disciplinas matemáticas, comenzadas desde la identificación del álgebra y la geometría por los trabajos pioneros de Descartes; contábamos con el cálculo diferencial e integral de Newton y Leibnitz; las geometrías no euclideanas de Lobachevski y otros destacados matemáticos; la teoría de conjuntos de Cantor y muchas otras cosas más; entre ellas, la teoría de la medida e integración de Borel, Lebesgue y otros, vinculada directamente con estos problemas de asignación de longitudes, áreas y volúmenes. También sabíamos que antes de buscar una solución a un problema matemático cualquiera, es más conveniente probar antes que tal solución existe y en caso positivo, cuántas son las soluciones posibles. El problema que tratamos tenía también su enfoque en este contexto.

© **Trabajadores de los talleres de Nonoalco, 1947.** Fondo *Donaciones*. CONACULTA/CNPPCF/MNFM.

PROBLEMA DÉBIL DE LA MEDIDA

Determinar si existe una función *m* con valores reales positivos incluyendo el valor infinito y definida sobre el conjunto de todos los subconjuntos reales (respectivamente del plano, respectivamente del espacio tridimensional) y que cumpla con las tres propiedades siguientes:

1. $m(I) = 1$, donde I es el intervalo $[0,1]$ en el caso real (respectivamente el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$ en el caso del plano y $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ en el caso espacial).

2. $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$, si A y B son dos conjuntos disjuntos, es decir, sin puntos comunes.

3. $m(A) = m(B)$, si A y B son dos conjuntos congruentes.

© **Cilindros de apoyo para la trabe del puente en el río Tuxtla, 1930.** Fondo *Comisión de Avalúo e Inventarios*. CONACULTA/CNPPCF/MNFM.

Estas tres condiciones son las mínimas que uno esperaría que satisficieran la longitud, el área y el volumen. La primera, asigna el valor *1* a las unidades o patrones de medida. La segunda, que si medimos, por ejemplo, áreas separadamente, el área total será la suma de las áreas. La tercera, que esta longitud, área o volumen, no dependerá de la posición del cuerpo cuando lo midamos. Hay otras cosas que interesan para tener un modelo matemático de la medición. Por ejemplo, si A es más pequeño que B, lo que matemáticamente se expresa como que A es una parte de B, deberá ocurrir que $m(A)$ sea más pequeño que $m(B)$. Lo que sucede, es que con las tres condiciones arriba mencionadas y con un poco de habilidad en el manejo de las leyes matemáticas, todas esas cosas se deducirán de las tres arriba mencionadas y por tanto no se expresan en el modelo para evitar redundancias.

Este problema enunciado es un problema típico de existencia. De existir tal m para el caso real, la llamaríamos longitud. En el caso del plano, la llamaríamos área. Y en el caso espacial, la llamaríamos volumen. Después habría que preguntarse si la solución es única. Es decir, si hay una sóla forma de definir la longitud, el área y el volumen.

Resulta que una solución al problema débil no nos ayudaría mucho desde el punto de vista práctico, pues para calcular, por ejemplo, el área de un disco por el procedimiento de estimar cuántas veces contiene al cuadrado unidad, tendríamos necesidad de pasar a procesos de límite que no están legalizados en el problema. Esto motiva el llamado problema fuerte de la medida, consistente en un problema similar al débil, pero donde la segunda condición se cambia, como sigue, para incluir la posibilidad de usar límites.

> La medida m de la unión de conjuntos $An, n = 1, 2, 3, ...,$ dos a dos disjuntos, tiene que ser igual a la suma de la serie infinita cuyos términos son las medidas $m(An)$ de estos conjuntos.

Dispongámosnos a horrorizarnos con las respuestas:

> El problema fuerte no tiene solución en ninguna dimensión. El problema débil no tiene solución en tres dimensiones. Sí tiene en una y dos dimensiones, pero estas soluciones no son únicas.

¿Cómo es que no podemos asignar volumen a todos los cuerpos? "No puede ser" –se dijeron muchos matemáticos. Aceptemos la no solución del problema fuerte por estar contaminado con los límites involucrados en las series. Pero, ¿y el problema débil? ¿Dónde está el fallo? ¡Ah! Resulta que a partir del axioma de selección, con las propiedades que se piden en el problema, se puede demostrar la existencia de una forma de cortar ciertos conjuntos tridimensionales, por ejemplo, una pelota, en varios pedazos y reconstruirlos a manera de tener dos conjuntos iguales al primero. Es como una justificación matemática de la multiplicación de los peces y los panes. El resultado es consecuencia de los trabajos de varios matemáticos entre 1914 y 1924, cuyos nombres se unen para denominar lo que hoy conocemos como paradoja de Hausdorff-Banach-Tarski. El axioma de selección asegura que existe esa posibilidad, cómo cortarlo es otro problema al que no da respuesta. Muchos matemáticos de la época coincidieron en que esto es una locura y que si el axioma de selección es el causante, pues había que eliminarlo de la matemática, aunque con ello eliminásemos una parte sustancial de toda la matemática escrita. Eso produjo una cierta división en el pensamiento matemático de la época. Había quienes lo aceptaban y quienes no, aunque hoy en día esto no es un problema grave según explicaremos un poco más adelante. Sólo que cuando algo se puede demostrar sin el axioma de selección se le otorga más valor.

¿Y por qué existe solución en una y dos dimensiones y no en tres? El problema está en la condición tercera relativa a que conjuntos congruentes deben tener la misma medida. Es un poco técnico: al aumentar la dimensión, van apareciendo nuevas formas de definir isometrías, lo que se traduce en el origen de más conjuntos congruentes. Luego esta condición se hace cada vez más difícil de sostener y resulta que el punto de ruptura se encuentra precisamente entre dos y tres dimensiones.

¿Y qué dice ese famoso axioma? Pues en principio parece inofensivo y sumamente lógico. En una primera aproximación establece que si X es un conjunto no vacío, existe una función que asigna a cada subconjunto no vacío A de X, un elemento x de X que se encuentra en el propio A. En su forma más general y rigurosa, el enunciado es algo sofisticado para quien no esté acostumbrado al lenguaje matemático.

> Axioma de selección: Sean Y y Z dos conjuntos y R una relación no necesariamente funcional entre todo Y y una parte no vacía de Z. Entonces, existe una función f de Y en Z, tal que todo y de Y, está relacionado con $f(y)$ según R.

Abandonemos el deseo de querer explicar detalladamente el significado del axioma, lo que pudiera resultar engorroso y nos llevaría tiempo. Sin embargo, pasemos a justificar lo que hemos adelantado respecto a que hoy en día tenemos claro qué sucede.

En efecto, Kurt Gödel, un famoso especialista en lógica matemática de la primera mitad del siglo XX, demostró en 1938 que si el sistema de axiomas que sustenta la teoría de conjuntos no es contradictorio, entonces tampoco resultaría contradictorio este sistema junto con la aceptación del axioma de selección. Hacia 1963, otro destacado matemático, Paul Cohen, demostró que si el sistema de axiomas que sustenta la teoría de conjuntos no es contradictorio, entonces tampoco resultaría contradictorio este sistema junto con la no aceptación del axioma de selección. De ambos resultados deducimos que tenemos libertad para adoptar la posición que deseemos. Sólo que tendremos dos teorías igualmente válidas, pero diferentes. La tendencia abrumadoramente mayoritaria hoy en día es aceptar que hay conjuntos llamados no medibles, o sea, que no les podemos asignar un volumen. Son tan raros en la práctica, que para justificar la existencia debemos acudir al axioma de selección y a los infinitos matemáticos. Pero no pasa nada. Con los conjuntos medibles que nos quedan nos sobra para trabajar y resolver problemas no sólo de la matemática, sino de la física, de la ingeniería, de la economía, de la medicina...

En la actualidad, nuevos problemas sumamente complejos y atrayentes retan a los matemáticos contemporáneos mientras una descomunal cantidad de más de dos millones de páginas en revistas de matemática se publican anualmente en el mundo, con resultados que con frecuencia incrementan a su vez los problemas pendientes de solución. Así es el arte y la ciencia de la matemática: aunque en constante cambio y desarrollo, el objetivo permanente es siempre aquel de asumir algunas cosas que llamamos axiomas e hipótesis y bajo leyes más o menos establecidas por la lógica, inferir otras que denominamos tesis. Eso es simplemente lo que se hizo al estudiar los conjuntos infinitos. Del trabajo matemático, lo que sirve perdura y lo que no es útil se desecha o con suerte pasa a la historia. La gracia está en que eso que hagamos sea útil de alguna manera, que sirva de algo. Como decía mi padre: “cualquiera pinta una paloma, el problema está en pintarle el pico ¡y que coma!”.

Miguel Antonio Jiménez Pozo, Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, BUAP. mjimenez@fcfm.buap.mx