La enseñanza de las MATEMÁTICAS ¡a cuenta gotas!

María del Pilar **Beltrán Soria**
René Gerardo **Rodríguez Avendaño**

Las preparatorias del Instituto de Educación Media Superior (IEMS) del Distrito Federal son relativamente recientes, considerando que el primer plantel sólo cuenta con once años de actividad docente (Plantel-Iztapalapa 1) sin embargo durante este tiempo, se han intentado infinidad de estrategias para poder enseñar matemáticas a los estudiantes, algunos con mayor o menor grado de eficacia, aunque siempre con las mutuas quejas entre estudiantes y docentes de los resultados obtenidos. A pesar de los esfuerzos realizados, el rezago en las materias correspondientes a matemáticas aún persiste y nos hace cuestionarnos: ¿será un problema relacionado a la práctica docente, o del alumnado que conforma nuestra comunidad estudiantil? Y es que llegan estudiantes con una diversidad cultural, económica y social tan marcada, que no es otra cosa que un reflejo de la zona del Distrito Federal en la que se localiza cada uno de los diecisiete planteles que conforman al IEMS. Sin embargo, es con estos alumnos que debemos trabajar y obtener los mejores resultados posibles; es por ello que la propuesta que se presenta en este trabajo se enfoca en el punto crucial de la práctica docente.

Se busca que el trabajo en el aula posibilite el desarrollo de competencias más allá del nivel discursivo y que plantee al currículo como un verdadero dispositivo de cambio en la organización de la vida escolar. Es necesario que el alumno esté interesado en aprender, y para lograr este fin se deben crear situaciones de aprendizaje.[1] De acuerdo a la teoría cognoscitiva, establecer metas y la autoevaluación del progreso constituyen importantes mecanismos motivacionales. El establecimiento de metas funciona junto con las expectativas de los resultados y la autosuficiencia.

Para fijar y conseguir los objetivos se requiere que el aprendizaje se realice a un nivel de dificultad apropiado, pues el sentimiento de éxito en la tarea que se realice aumenta la motivación para las tareas futuras, en tanto que el sentimiento de fracaso disminuye la motivación por la misma. Dado que la necesidad es el mecanismo que incita a la persona a la acción, los incentivos son las fuerzas externas que generan actividades relacionadas con la meta a alcanzar, y por último la esperanza de tener éxito finca las bases para la persistencia al realizar las actividades.

La labor de motivación del docente se encuentra en presentar situaciones que puedan crear en los estudiantes primero, la necesidad de actuar, y después, fijarse metas en las cuales vayan teniendo éxito, motivándolos a metas más altas hasta lograr un objetivo. Las necesidades sobre las cuales va a trabajar el docente son: estima, aprobación y reconocimiento del grupo al cual pertenece, y las de desarrollo de las potencialidades para la autorrealización mediante la solución de problemas vinculados con su contexto social.

Es indudable que las posibilidades de éxito son más altas cuando el estudiante siente que sus habilidades son adecuadas para lograr las metas y así apropiarse del tema, lo cual es una tarea del docente, quien debe entender cómo guiar a los estudiantes en un proceso integral de enseñanza-aprendizaje: “quien no sabe aprender no sabe enseñar”. Enseñar matemáticas es más que obtener un resultado de un problema; se trata de enseñar a construir un pensamiento matemático a partir de la realidad. Cuando las habilidades son altas y la dificultad de la tarea es baja el estudiante se encuentra en la región de aburrimiento. Cuando las habilidades son bajas y la dificultad de la tarea es alta el estudiante se encuentra en la región de ansiedad. El docente debe buscar tareas que estén por encima de sus capacidades reales pero que puedan alcanzarse trabajando con ayuda de otras personas.

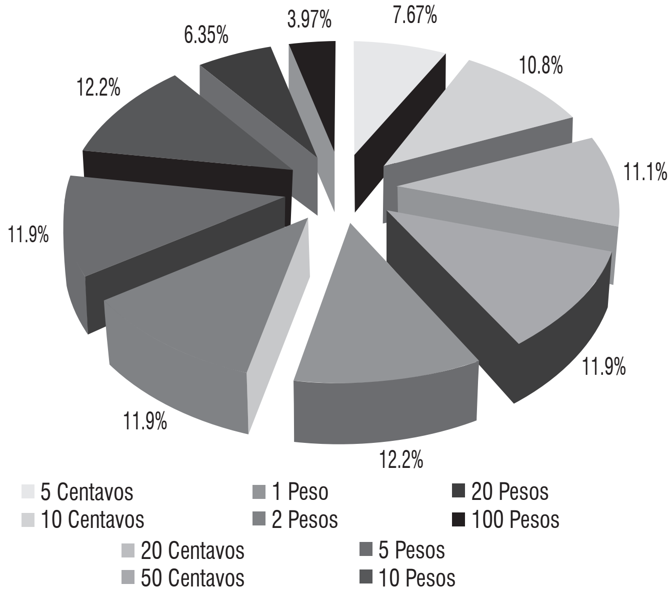

Figura 1. Número de denominaciones conocidas por los estudiantes y su correspondiente porcentaje.

Es labor del docente demostrar que las habilidades se pueden desarrollar y lograr la orientación del estudio hacia el aprendizaje. Cuando el objetivo es aprobar un examen, no hay motivo para estudiar. Si tratamos de motivar con “ejemplos interesantes de su contexto familiar” se corre el riesgo que sólo se les haga interesante pero que no les motive a buscar la forma de resolverlo. En cambio si el grupo siente la necesidad de resolver un problema, entonces va a unirse para tratar de darle solución buscando las herramientas necesarias para ello. Es decir, se requiere un problema detonante que motive a alcanzar el objetivo; no es suficiente con estar motivados y unidos para lograr el objetivo, hay que saber cómo se aprende para realizar las acciones que permiten el aprendizaje: es ahí donde el docente puede guiar al estudiante para que realice las acciones que lo llevan a la construcción del conocimiento. La interacción estudiante-profesor provee retroalimentación, motivación y diálogo, mientras que en la interacción estudiante-contenido se obtiene la información intelectual del material, y finalmente en la interacción estudiante-estudiante se da un intercambio de ideas e información.[2] Ejemplificaremos estos diseños didácticos basándonos en el problema de la primera determinación precisa y directa de la carga eléctrica del electrón, desarrollado en 1913 por Robert Millikan, con el resultado e = 1.59 x 10^{-19} C.

EJEMPLO: LA DETERMINACIÓN DE LA CARGA ELÉCTRICA DEL ELECTRÓN

El ejemplo presentado a continuación puede ser incorporado en una asignatura como matemáticas, química o física debido a que es interdisciplinario, aun cuando el problema original fue extraído de un texto de química.[3] En el experimento de Millikan para determinar la carga del electrón, cada gota de aceite quedaba cargada con un uno, dos o más electrones, de tal manera que las determinaciones de Millikan para cada gota siempre se referían a una carga equivalente a un número entero de veces la carga de un solo electrón.

Tal y como se explica en trabajos publicados por nuestro grupo de investigación,[4,5] si se desea realizar el mismo experimento que realizó Millikan seguramente nos llevaríamos mucho tiempo y esfuerzo; sin embargo, se puede entender perfectamente lo realizado si se utiliza un problema similar: se tienen varias pilas de monedas de diez pesos, cada una de esas pilas con un número indeterminado de monedas. Las masas de las pilas son, en gramos: 19.99, 39.98, 59.97, 69.87 y 89.95 ¿Cuál es el peso probable de una moneda? A continuación se desarrolla la estrategia que desemboca en la situación de aprendizaje a través de la aproximación histórica del experimento de las gotas de aceite de Millikan.

CONOCIENDO LAS MONEDAS Y SU COMPOSICIÓN

El primer paso es realizar una exploración del conocimiento que tienen los estudiantes de las denominaciones de las monedas de circulación en la República Mexicana, su uso, la preferencia en comparación con los billetes y su composición, todo esto para lograr una mayor contextualización del problema.

La propuesta se llevó a cabo en una muestra de 54 estudiantes (el 54% del sexo masculino, 46% del sexo femenino) la edad de los estudiantes es de 15 a 24 años. El número máximo de denominaciones de monedas que conocen estos estudiantes fue de siete y ocho, que corresponden al 24% y 28 % respectivamente (Figura 1).

Es importante resaltar el hecho de que un 56% de los estudiantes del sexo femenino prefieren utilizar las monedas al realizar cualquier transacción, mientras que sólo 20% prefieren los billetes y el 24% manifiesta que traer ambos es de mayor utilidad. En el caso del sexo masculino las cosas difieren en gran medida si se considera que sólo el 14% prefiere las monedas, 62% los billetes y 24% traer ambos. Los estudiantes manifiestan conocer las diferentes monedas que circulan en la República Mexicana en mayor o menor medida (Figura 2).

En lo correspondiente a la composición de cada una de las monedas que se encuentran en circulación, los estudiantes proporcionaron resultados muy interesantes en donde ponen de manifiesto que pueden estar constituidas por un solo metal o bien por aleaciones de dos, tres o hasta cuatro componentes; los resultados se presentan en la Tabla 1.

Una vez que se ha incorporado al estudiante al contexto de las monedas es momento de regresar al problema de la solución de la masa de la moneda de diez pesos, haciéndole saber al estudiante que puede ser generalizado para cualquier masa de cada una de las monedas que se han presentado.

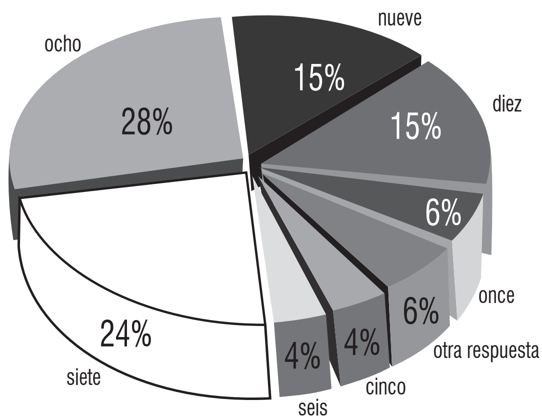

Figura 2. Porcentaje de estudiantes que aseguran conocer las diferentes denominaciones de monedas.

Tabla 1. Número de estudiantes y sus respuestas acerca de la composición de las monedas. *Estudiantes que acertaron acerca de la composición de las monedas.

Composición	5 cent	10 cent	20 cent	50 cent	1 peso	2 pesos	5 pesos	10 pesos	20 pesos	100 pesos
Cobre	8	6	25*	29*	6*	5*	6*	6*	2*	1
Plata	4	5	1		1	2	1	2*	7*	10*
Hierro	6*	6*	4	2	1	1	1	2	1	1
Níquel	3*	3*	3*	1*	1*	1*	1*	2		
Aluminio	12	11	1*						1	
Plomo		1	1							
Estaño			2	2				1	1	
Bronce	2	2	10	11	1	1	1	4	1	1*
Acero	2	2	1							
Metal	4	4								
Latón	2	2	1	1						
Aluminio y Níquel	2	2								
Hierro y aluminio	1	1	1							
Cobre y plata	1				5	6	6	4	9	7*
Hierro y cobre	1				4	3	3		3	
Hierro y acero		1		2	1	1	1			
Cobre y bronce		1		1	3	3	3	4	4	1
Cobre y plomo				1	2	2	2	1	1	
Hierro y bronce				1		1	1	2		
Bronce y níquel					5	5	5	4	1	
Hierro y plata					1					
Metal y bronce					2	2	2			3
Aluminio y bronce					1	1	1	1	1	
Acero y cobre					2*	1*	2*	2*		1*
Bronce y plata					2			2*	2*	
Cobre y metal					2*	2*	2*	3	2	
Estaño aluminio					1	1	1			
Cobre y aluminio					7	7	7	6		3
Hierro y plata						1	1			
Estaño y níquel						1	1			1
Oro y plata										1
Plata y bronce										4*
Cobre y estaño								1		1
Cobre y níquel									1	
Plata y níquel									1*	
Níquel y estaño									1	
Cobre y acero									1*	
Aleaciones de tres o más metales					1	2	2		3*	3*
No sabe	6	5	3	2	3	3	3	5	10	14
% de estudiantes que conocen la moneda	94%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	94%	71%	42%

SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE ENCONTRAR LA MASA DE UNA MONEDA DE DIEZ PESOS

El algoritmo en detalle de la manera de solucionar estos problemas se puede encontrar en los trabajos anteriores de nuestro grupo de trabajo,[4, 5] y puede aplicarse a cualquier denominación de monedas. Habrá que establecer que el número de monedas en las pilas debe ser un número entero positivo y que se pueden obtener los incrementos en masa de cada uno de las pilas de monedas, como se presenta en la Tabla 2.

Analizando los incrementos nos damos cuenta de que el menor de ellos es de 10 g, por lo que debe existir un número entero positivo de monedas que proporcione dicha cantidad y que la masa de cada una de las monedas no debe ser mayor a 10g (es por eso que se omite que el número de monedas sea uno en los demás incrementos), además de que en todo momento debe satisfacer que el número de monedas en las pilas sea un entero positivo para los valores de los incrementos, tal como se muestra en la Tabla 3.

De los resultados de la tabla se puede verificar que las cantidades que son enteros positivos para el número de monedas en cada una de las pilas son: m = 9.995 g,

Peso de las pilas de monedas	19.99g	39.98g	59.97g	69.97g	89.95g
Diferencia entre cada una de las pilas de monedas.					
Δm	$\Delta m_1 =$ (39.98-19.99)	$\Delta m_2 =$ (59.97-39.98)	$\Delta m_3 =$ (69.97-59.97)	$\Delta m_4 =$ (89.95-69.97)	
Δm	$\Delta m_1 = 19.99$	$\Delta m_2 = 19.99$	$\Delta m_3 = 10$	$\Delta m_4 = 19.98$	

Tabla 2. Cálculo de los incrementos en masa para las pilas de monedas de diez pesos.

m = 4.9975 g, m = 3.331 g, m = 2.498 g, m = 1.999 g (los resultados donde no se obtiene el número entero de monedas son eliminados); los demás valores (11 monedas en adelante) se omiten por resultar masas muy pequeñas para una moneda de diez pesos. Es justo en este momento donde se puede apreciar con claridad que entre mayor número de datos se tenga disponible (Tabla 3), menor será la probabilidad de cometer un error en la determinación de la masa de las monedas individuales, con lo cual no causa ninguna sorpresa el hecho de que en las mediciones realizadas por Millikan, además de un número considerable de gotas estudiadas, se haya tomado el tiempo de hacerlo a lo largo de 60 días consecutivos.[6]

En este trabajo, para discernir entre los cinco valores propuestos para la masa individual de una moneda de diez pesos se puede consultar diferentes fuentes, como el Banco de México,[7, 8] y de ahí obtener que el peso de una moneda de diez pesos puede variar entre 10.39 g y 11.183 g. La diferencia entre estas dos masas es debida a la composición de la parte central de la moneda, por lo que dados los valores posibles que hemos propuesto, nos quedamos con m = 9.995 g, y la diferencia entre los valores puede deberse a la falta de experiencia en la utilización de las balanzas analíticas por parte de los estudiantes.

CONCLUSIONES

De los resultados presentados en este trabajo se puede concluir que los estudiantes del IEMS conocen medianamente bien las denominaciones de las monedas que circulan en la República Mexicana, así como algunos de los materiales de que están constituidas; es importante remarcar el hecho de que en la parte del conocimiento químico, estos estudiantes muestran un conocimiento significativo de lo que representa una aleación, mientras que en los tratamientos matemáticos al momento de incorporar los conceptos como números enteros, fraccionarios, incrementos etc., asociados al problema de determinar la masa de una moneda de diez pesos, no parece existir esa dificultad inherente al hecho de sólo presentar conceptos de manera aislada. El incorporar una situación de aprendizaje aderezada con la aproximación histórica de la determinación de la carga eléctrica del electrón es una muy buena alternativa para introducir a los estudiantes en aquellos temas que de inicio se definen

Masa propuesta de cada moneda	# de monedas para el valor Δm	Número de monedas en la pila 1	Número de monedas en la pila 2	Número de monedas en la pila 3	Número de monedas en la pila 4	Número de monedas en la pila 5
m=19.99/2 =9.995 g	2	2	4	6	7	9
m=19.99/3=6.6633 g	3	3	6	9	10.5*	13.5*
m=19.99/4 =4.9975 g	4	4	8	12	14	18
m=19.99/5 =3.998 g	5	5	10	15	17.5*	22.5*
m=19.99/6 =3.331 g	6	6	12	18	21	27
m=19.99/7 =2.855 g	7	7	14	21	24.5*	31.5*
m=19.99/8 =2.498 g	8	8	16	24	28	36
m=19.99/9 =2.221 g	9	9	18	27	31.5*	40.5*
m=19.99/10 =1.999 g	10	10	20	30	35	45

Tabla 3. Cálculo de las masas de cada moneda de diez pesos de acuerdo a los incrementos.
*Valores no permitidos para el número de monedas.

© **Aída Ortega,** de la serie *Animales,* 2010.

tanto por docentes como por estudiantes como difíciles y aburridos.

Al establecer la importancia que tienen las monedas en nuestra vida cotidiana, los estudiantes se acercan de una manera positiva al pensamiento matemático, sin los miedos heredados o adquiridos con anterioridad, además de que algunos van más allá en la solución de este problema, al realizar el cálculo adicional de ¿cuál sería la masa total de todas las monedas de diez pesos que se encuentran actualmente en circulación? Este hecho que pudiera no ser significativo, encierra en sí miso algo que todos los docentes anhelamos al presentar una estrategia didáctica y es el hecho de que los mismos estudiantes hagan suyo un problema que originalmente no lo era.[9-11] En este caso, con la información de los billetes y monedas que están en circulación en la República Mexicana[7] se obtiene: para el mes de diciembre de 2009 un total de 6.31 toneladas; para el mes de enero de 2010, 6 toneladas y para febrero del mismo año, 5.84 toneladas.

REFERENCIAS

1 Farfán R. Matemática Educativa: de la investigación a la realidad del aula. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 15(2) (2002) pp. 1119-1125.

2 Farfán R y Montiel G. Investigación en educación a distancia. Un acercamiento sistémico. Resúmenes de RELME Vol. 15 (2001) pp. 119-124.

3 Garritz A, Chamizo, JA. *Tú y la Química.* Prentice Hall, México (2001) p. 312.

4 Beltrán MP Rodríguez RG. ¡A cuenta gotas! Parte 1. ContactoS vol. 74 (2009) pp. 43-49.

5 Beltrán MP Rodríguez RG. ¡A cuenta gotas! Parte 2. ContactoS, Vol. 75, (2010) pp. 53-63.

6 Crease RP. El prisma y el péndulo, los diez experimentos más bellos de la ciencia. Crítica, Barcelona (2006) pp. 152-169.

7 http://www.banxico.org.mx. Consultada 14 de abril de 2010.

8 http://www.ensubasta.com.mx/monedas_actuales_en_mexico.htm. Consultada 14 de abril de 2010.

9 http://www.childcareaware.org. Consultada 14 de abril de 2010.

10 http://centros5.pntic.mec.es. Consultada 14 de abril de 2010.

11 http://www.eliceo.com/stag/estrategias-para-ensenar-a-sumar.html. Consultada 14 de abril de 2010.

María del Pilar Beltrán Soria
e-mail: pilysori@yahoo.com.mx

René Gerardo Rodríguez Avendaño
Instituto de Educación Media Superior del D.F.
e-mail: a_rgra@yahoo.com.mx