EMMY NOETHER, DEL ALGEBRA DEL SIGLO XIX A LA DEL XX

Raymundo Bautista*

elementos núm. 7, año 2, vol. 1. Impreso en México

Introducción

Este año se cumple el primer centenario del nacimiento de Emmy Noether, destacada matemática alemana. Las contribuciones matemáticas de Noether se centran en el álgebra: teoría de invariantes, teoría de representaciones, álgebras no conmutativas, álgebra conmutativa. El pensamiento algebraico de Emmy Noether ha tenido una profunda influencia en el álgebra del siglo XX, ella junto con matemáticos de la talla de Kronecker, Dedekind, Frobenius, Brauer y otros dieron una nueva visión del álgebra con respecto a la del siglo XX.

Daremos una idea de la contribución de Noether a través de un ejemplo, el desarrollo de la teoría de representaciones de grupos.

La teoría de representaciones de grupos recoge una gran cantidad de ideas del siglo XX. Presentaremos aquí primero los problemas y resultados, que se remontan hasta Gauss, que influyeron en el desarrollo de la teoría de representaciones de grupos. A continuación veremos el trabajo de G. Frobenius, después consideraremos las ideas de Noether y por último daremos algún indicio de los desarrollos recientes influidos por Noether.

*Instituto de Matemáticas, UNAM. Ciudad Universitaria, 04510, México, D.F.

Formas cuadráticas

En 1801 se publica en Leipzig, centro librero por excelencia en Alemania, las *Disquisitiones arithmeticae* de K. F. Gauss. En este libro se recoge el trabajo en teoría de números desarrollado durante la estancia de Gauss en Gotinga de 1796 a 1799. Este es uno de los trabajos más impresionantes de todos los tiempos y ejerció una influencia enorme en todo el siglo XIX y aun hasta nuestros días.

La teoría de los números trata del estudio de las propiedades de los números enteros, un tema central es el relativo a la solución de ecuaciones diofánticas, esto es, el problema de encontrar soluciones enteras $n_1, \ldots, n_s$ para ecuaciones $f(x_1, \ldots, x_s) = 0$ en donde $f(x_1, \ldots, x_s)$ es un polinomio con coeficientes enteros.

Los fundamentos de la teoría de los números fueron puestos por Pierre de Fermat (1601-1665) en una serie de trabajos esparcidos en cartas destinadas a distintos matemáticos europeos. Aunque los resultados de Fermat son impresionantes, éstos, así como los problemas planteados por él, no encontraron mucho interés entre los matemáticos de la época. Es hasta el siglo siguiente, en el que gracias al enorme prestigio de Leonard Euler (1701-1783), y al desarrollo que él mismo le impone a la teoría de números, que ésta alcanza gran prestigio y popularidad.

Es precisamente a través de la lectura de los trabajos de Euler que en Gauss se despierta enorme interés y deleite en la teoría de números al grado de declararla la "Reina de las Matemáticas".

Una de las partes fundamentales y más acabadas de las *Disquisitiones* es el capítulo V en el que se desarrolla la teoría de las formas cuadráticas:

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 \,;\, a, b, c \text{ enteros}$$

El discriminante de f es por definición $D = b^2 - ac$.

Se supone en lo que sigue que a, b, c no tienen factor común distinto de 1 y -1, y si $D < 0$, $a > 0$, $c > 0$.

Si tenemos otra forma $g(x, y) = a'x^2 + 2b'xy + c'y^2$, se dice que f y g son equivalentes si existe un cambio de variables

$$x = \alpha x' + \beta y', \qquad y = \gamma x' + \delta y'$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ enteros $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ tales que

$$f(\alpha x' + \beta y', \gamma x' + \delta y') = g(x', y')$$

Resulta además que las dos formas tienen el mismo discriminante.

Un problema central en toda esta teoría es determinar los enteros n para los cuales existen x_0, y_0 enteros tales que $n = f(x_0, y_0)$. En tal caso diremos que n es representado por f. Claramente si f y g son equivalentes n es representado por f si y solo si lo es por g.

En el resultado de abajo, uno de los más destacados de las *Disquisitiones*, n denota cualquier entero representado por f, y si p es un primo impar no divisor de n:

$$\left(\frac{n}{p}\right) = \begin{cases} 1 \text{ si existe } x_0 \text{ entero tal que } n - x_0^2 \text{ es múltiplo de } p \\ -1 \text{ si no existe tal } x_0. \end{cases}$$

Teorema. Si p es un primo $\neq 2$, divisor de D, entonces $\left(\frac{n}{p}\right)$ permanece constante para toda n no divisible por p.

Si $D \equiv 3 \pmod 4$, $(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}$ {permanece constante para toda n impar.

Si $D \equiv 2 \pmod 8$, $(-1)^{\frac{1}{8}(n^2-1)}$ {permanece constante para toda n impar.

Si $D \equiv 6 \pmod 8$, $(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)+\frac{1}{2}(n^2-1)}$ {permanece constante para toda n impar.

Si $D \equiv 4 \pmod 8$, $(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}$ {permanece constante para n impar.

Si $D \equiv 0 \pmod 8$ ambos $(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}$ y $(-1)^{\frac{1}{2}(n^2-1)}$ permanecen constantes para n impar.

Gauss introduce la idea de un carácter de f con las siguientes palabras (ver Hawkins [2]):

> Por lo tanto todos los números que pueden representarse por una forma primitiva f con determinante D tendrán una relación fija con los primos divisores de D (por las cuales no son divisibles). Además, números impares que pueden representarse por f tendrán relaciones fijas con los números 4 y 8, . . . A este tipo de relación con cada uno de esos números le llamaremos el *carácter* o el *carácter particular* de la forma f.

Toma do las clases de equivalencia de formas cuadráticas con discriminante fijo D, Gauss puede introducir una multiplicación entre estas clases, obteniendo un grupo abeliano finito *D*.

Dedekind probó después que para cada divisor primo impar p de D existen funciones

$$\chi_p : D \to \{1, -1\}$$

tales que $\chi_p(xy) = \chi_p(x)\chi_p(y)$ con $x, y \in D$ y xy la multiplicación de x e y en *D*.

Estas funciones dan los caracteres particulares de una forma f con determinante igual a D como sigue: Si por [f] representamos la clase f en D y p es un divisor impar de D, entonces para n representado por f se tiene

$$\left(\frac{n}{p}\right) = \chi_p([f])$$

También existe una función $\chi_2 : D \to \{1, -1\}$ con la propiedad $\chi_2(x)\chi_2(y) = \chi_2(xy)$ tal que por ejemplo si $D \equiv 2 \pmod 8$ n impar representado por f entonces $(-1)^{\frac{1}{8}(n^2-1)} = \chi_2([f])$ y similarmente para los otros valores de D módulo 8.

Las funciones χ_p son casos particulares de homomorfismos $\chi: A \to \mathbb{C}^*$ con A grupo abeliano, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}$ sin el 0, considerado como grupo con la operación de multiplicación en $\mathbb{C}$.

Recordemos que si G_1 y G_2 son grupos, un homomorfismo $f: G_1 \to G_2$ es una función f tal que $f(xy) = f(x)f(y)$ para toda x e y en G_1.

Los homomorfismos $\chi: A \to \mathbb{C}^*$ con A grupo abeliano recibieron el nombre de carácter del grupo A.

Dirichlet aplicó extensivamente esta idea en sus investigaciones de teoría de números usando series infinitas.

Sea $\mathbb{Z}_k$ las clases de congruencia mod k. Por $\mathbb{Z}_k^*$ denotamos las clases de congruencia de números n primos con k.; $\mathbb{Z}_k^*$ es un grupo abeliano con la multiplicación de clases de congruencia. Consideremos $\chi: \mathbb{Z}_k^* \to \mathbb{C}^*$ un carácter de $\mathbb{Z}_k^*$.

Entonces una L-serie asociada a χ está dada por

$$L(s) = \sum_{(n,k)=1} \frac{\chi(\bar{n})}{n^s}$$

con la $\bar{n}$ la clase de n mod k.

Nótese de pasada que fijo p, la función $\bar{n} \to \left(\frac{n}{p}\right)$ es un carácter de $\mathbb{Z}_k^*$.

El determinante de un grupo, un hallazgo de Dedekind

En sus investigaciones sobre teoría de los números, Dedekind considera el siguiente determinante:

Sea G un grupo finito y $e=g_1, g_2, \ldots, g_n$ todos sus elementos, introduzcamos indeterminadas x_g por cada g en G.

Consideremos la n x n matriz $(x_{gh^{-1}})_{g \in G,\, h \in G}$

Sea $D(x_{g_1}, \ldots, x_{g_n}) = \det(x_{gh^{-1}})$

Este es un polinomio en las indeterminadas $x_{g_1}, \ldots, x_{g_n}$ de grado n.

Supongamos ahora que G sea un grupo abeliano, entonces se puede probar que existen n diferentes caracteres de G, $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$.

Tomemos uno de estos caracteres, digamos χ, multipliquemos el primer renglón de la matriz $(x_{gh^{-1}})$ por $\chi(g_1)$, el segundo por $\chi(g_2)$, . . ., el n-ésimo por $\chi(g_n)$, obtenemos:

$$cD = \det\begin{pmatrix} \chi(g_1)x_{g_1g_1^{-1}} & \chi(g_1)x_{g_1g_2^{-1}} & \ldots & \chi(g_1)x_{g_1g_n^{-1}} \\ \chi(g_2)x_{g_2g_1^{-1}} & \chi(g_2)x_{g_2g_2^{-1}} & \ldots & \chi(g_2)x_{g_2g_n^{-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \chi(g_n)x_{g_ng_1^{-1}} & \chi(g_n)x_{g_ng_2^{-1}} & \ldots & \chi(g_n)x_{g_ng_n^{-1}} \end{pmatrix}$$

con $c \in \mathbb{C}^*$.

Sumemos ahora todos los renglones al primero, entonces en la j-ésima columna del primer renglón se tiene:

$$\sum_{g \in G} \chi(g)x_{gg_j^{-1}}$$

Poniendo $h = gg_j^{-1}$ si g recorre G, h también; $g = hg_j$ y la suma queda así:

$$\sum_{h \in G} \chi(hg_j)x_h = \sum_{h \in G} \chi(h)\chi(g_j)x_h =$$

$$= \chi(g_j) \sum_{h \in G} \chi(h)x_h$$

Por tanto:

$$cD = \begin{pmatrix} (\Sigma\chi(h)x_h)\, x_{g_1g_1^{-1}} & (\Sigma\chi(h)x_h)x_{g_1g_2^{-1}} & \ldots & (\Sigma\chi(h)x_h)x_{g_1g_n^{-1}} \\ \chi(g_2)x_{g_2g_1^{-1}} & \chi(g_2)x_{g_2g_2^{-1}} & \ldots & \chi(g_n)x_{g_2g_n^{-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \chi(g_n)x_{g_ng_1^{-1}} & \chi(g_n)x_{g_ng_2^{-1}} & \ldots & \chi(g_n)x_{g_ng_n^{-1}} \end{pmatrix}$$

$$= (\Sigma\chi(h)x_h)p(x_{g_1}, \ldots, x_{g_n})$$

Por tanto $\Sigma\chi(h)x_h$ divide a $D(x_{g_1}, \ldots, x_{g_n})$.

Estos polinomios son diferentes y primos entre sí para distintos χ, en consecuencia

$$\prod_{i=1}^{\widetilde{n}} (\Sigma\chi_i(h)x_h) \text{ divide a D}$$

Como ambos son del mismo grado:

$$D(x_{g_1}, \ldots, x_{g_n}) = c' \prod_{i=1}^{\widetilde{n}} (\Sigma\chi_i(h)x_h)$$

Tomando $x_{g_1} = 1$, $x_{g_2} = \ldots = x_{g_n} = 0$, se tiene $c' = 1$. En consecuencia:

$$D(x_{g_1}, x_{g_2}, \ldots, x_{g_n}) = \prod_{i=1}^{\widetilde{n}} (\Sigma\chi_i(h)x_h).$$

Si G no es abeliano, igual que antes se puede probar que D tiene tantos factores lineales $\sum_{h\in G} \chi(h)x_h$ como homomorfismos χ: G → $\mathbb{C}^*$ se tengan. Sin embargo en este caso hay menos homomorfismos en $\mathbb{C}^*$ que el orden del grupo. Como el grado de D es n, D tiene más factores.

En ejemplos particulares, S_3 y los cuaternios, Dedekind pudo encontrar los otros factores irreductibles de D (que ya no fueron lineales) y ver su relación con el grupo.

Dedekind pensó inicialmente en considerar "sistemas numéricos" más grandes que $\mathbb{C}$ con el fin de obtener una factorización de $P(x_{g_1}, \ldots, x_{g_n})$ en factores lineales. Sin embargo, con la excepción de unos pocos casos no tuvo mayor éxito.

Dedekind se dirigió a G. Frobenius, recién nombrado sucesor de Kronecker en la Universidad de Berlín, haciéndole partícipe de sus descubrimientos, iniciándose una amigable correspondencia. En este intercambio, posteriormente no solamente le comunicó sus ideas sino le mandó sus cálculos sobre los grupos S_3 y los cuaternios.

La solución de G. Frobenius

Georg Frobenius (1849-1917) cambió el punto de vista de Dedekind pensando en lugar de extender los coeficientes, generalizar el concepto de carácter. Procedió de la manera señalada a continuación:

Tómese $h_1, h_2, \ldots, h_s$ un sistema de representantes de las clases conjugadas de G e introduzcamos variables $z_{h_1}, \ldots, z_{h_s}$.

En $D(x_{g_1}, \ldots, x_{g_n})$ hagamos la sustitución siguiente: tomemos x_g, entonces $g = uh_iu^{-1}$ para alguna $i \in \{1, \ldots, s\}$. Pongamos $x_g = z_{h_i}$. De esta forma obtenemos un nuevo polinomio en $z_{h_1}, \ldots, z_{h_s}$: $D^*(z_{h_1}, \ldots, z_{h_s})$.

Ahora se prueba que P^* se factoriza en factores lineales de la forma:

$$D^*(z_{h_1}, \ldots, z_{h_s}) = \prod_{i=1}^{n} (r^{(i)}(h_1)z_{h_1} + \ldots + r^{(i)}(h_s)z_{h_s})$$

En donde las $r^{(i)}$ son funciones de G en $\mathbb{C}$. De entre éstas se pueden escoger s, $r^{(1)}, \ldots, r^{(s)}$ linealmente independientes sobre $\mathbb{C}$. La relación con la $D(x_{g_1}, \ldots, x_{g_n})$ original es como sigue: sea

$$P(x_{g_1}, \ldots, x_{g_n}) = \prod_{i=1}^{\ell} \Phi_i(x_{g_1}, \ldots, x_{g_n})^{q_i}$$

con $\Phi_i(x_{g_1}, \ldots, x_{g_n})$ polinomio irreducible.

Denotamos por $\Phi_i^*(z_{h_1}, \ldots, z_{h_s})$ el resultado de sustituir en las Φ_i las x_g por las z_h como arriba se indicó.

Entonces se tiene, después de una renumeración adecuada de los índices.

$\ell = k$ y $\Phi_i^*(z_{h_1}, \ldots, z_{h_s}) = (r^{(i)}(h_1)z_{h_1} + \ldots + r^{(i)}(h_s)z_{h_s})^{t(i)}$

A las funciones $r^{(i)}$ G → $\mathbb{C}$, Frobenius las consideró como las generalizaciones de los caracteres de grupos abelianos y les llamó caracteres de dimensión superior.

Frobenius hizo un estudio muy detallado de las funciones $r^{(i)}$, encontrando relaciones muy interesantes entre ellas.

Estos trabajos fueron presentados a la Academia de Ciencias de Berlín los días 30 de julio y 3 de diciembre de 1896 bajo los títulos:

"Ueber Gruppencharaktere" y "Ueber die Primfactoren der Gruppendeterminante".

Un año después Frobenius encontró la interpretación que ahora se da a los caracteres.

Para cada $r^{(i)}$ existe un homomorfismo T_i: G → GL(n(i), $\mathbb{C}$) con GL(n(i), $\mathbb{C}$) el grupo de matrices no singulares n(i) x n(i) con coeficientes en $\mathbb{C}$, tal que para cada h en G tenemos

$$\frac{\lambda^{(i)}}{H(h)} r^{(i)}(h) = \text{traza de } T_i(h) = \text{tr}T_i(h) = \sum_{s=1}^{n(i)} A_{ss}^{(i)}(h)$$

en donde $T_i(h) = (a_{u,v}^{(i)}(h))$, λ^i es un factor de proporcionalidad y H(h) = número de elementos en la clase conjugada de h en G.

La contribución de E. Noether

En su correspondencia con Dedekind, Frobenius apuntaba el hecho de que el teorema de Fermat, $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, a no divisible por p —un primo—, puede probarse ya sea usando únicamente la multiplicación o también la suma:

$(a + b)^p \equiv a^p + b^p \pmod p$. Estas observaciones lo llevaron a escribir: "Muchas veces he pensado cómo, a la multiplicación de elementos, se le podría añadir otra operación (adición)". (ver Hawkins [3]).

Esta idea fue completamente realizada por E. Noether, aunque desde luego ideas similares fueron consideradas mucho antes, pero su conexión clara y simple con la teoría de representaciones únicamente fue vista por ella.

La idea central es la consideración del álgebra de grupo: sea K un campo arbitrario y G un grupo, por KG denotamos la colección de funciones de G en K. Si f y h son dos de estas funciones, f + h está definida por (f + h)(s) = f(s) + h(s).

Si $c \in K$, (cf)(s) = cf(s).

El producto de las funciones f y h, fh se define como sigue si $s \in G$

$$fh(s) = \sum_{x\in G} f(x)h(x^{-1}s)$$

No es difícil ver que KG es con las operaciones anteriores un anillo. Si $g_1 = e, g_2, \ldots, g_n$ son los elementos de G, e = identidad de G, las funciones f_{g_i} definidas por

$$f_{g_i}(g) = \begin{cases} 1 \text{ si } g = g_i \\ 0 \text{ si } g \neq g_i \end{cases} \text{ forman una K-base de KG.}$$

Así que la dimensión de KG es igual a $n = [G.1] =$ orden del grupo G.

Si $a, b \in K$, $af_e = bf_e$ si y solamente si $a = b$, además $(a+b)f_e = af_e + bf_e$, en consecuencia podemos identificar al elemento a en K con af_e en KG, así que éste último contiene a K en su centro y por tanto resulta una K-álgebra de dimensión finita.

También se tiene $f_{gh} = f_g f_h$ y $f_g = f_{g'}$, si y solamente si $g = g'$. Por tanto, G como grupo puede identificarse con la colección de elementos f_g de KG con la operación de multiplicación que existe en KG. Por esta razón podemos identificar a g con f. Con esta identificación los elementos de KG quedan escritos como $\Sigma\alpha_g g$, $\alpha_g \in K$.

Como apuntamos antes los caracteres de G están relacionados con homomorfismos $T: G \to GL(n, K)$. Otra idea de Noether fue la de relacionar este concepto con el de KG-módulo:

Si A es un anillo con unidad 1, M se llama un A-módulo si

(i) M es un grupo abeliano. Denotemos la operación de M por +.

(ii) Existe una función $A \times M \to M$ tal que si denotamos la imagen de (a, m) por am se tienen las siguientes propiedades:

$$(a+b)m = am + bm; \quad a, b \in A, m \in M$$

$$1m = m, \quad m \in M$$

$$a(m_1 + m_2) = am_1 + am_2, \quad a \in A, m_1, m_2 \in M$$

$$a(bm) = (ab)m; \quad a, b \in A, m \in M.$$

Si M es un KG-módulo, como K está contenido en KG, M resulta también un K-espacio vectorial.

Ahora bien, si $T: G \to GL(n,K)$ es una representación de G, construyamos un KG-módulo. Sea $M = K^n$ = espacio vectorial n-dimensional. Si $g \in G$ y $m \in M$ $(\Sigma\alpha_g g)m$ se define por $\Sigma\alpha_g T(g)(m)$, en donde $T(g): K^n \to K^n$ es la transformación lineal determinada por la matriz T(g) con respecto a la base $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)$ de K^n.

Recíprocamente sea M un KG-módulo y supongamos M de dimensión finita sobre K. Sea $y_1, \ldots, y_\ell$ una base para M como K-espacio vectorial y consideremos la aplicación $\psi(g): M \to M$ dada por $\psi(g)m = gm$. Claramente $\psi(g)$ es una transformación K-lineal. Sea T(g) la matriz de $\psi(g)$ con respecto a la base $y_1, \ldots, y_\ell$. Entonces, como no es difícil ver $g \to T(g)$ constituye una representación de G en $GL(\ell, K)$.

Desde luego el anillo de grupo KG puede considerarse como KG-módulo, usando la propia multiplicación de KG.

Una de las contribuciones más notables de Emmy Noether es la forma de manipular los objetos algebraicos. Así en nuestro caso de KG-módulos un papel relevante lo juegan los morfismos de KG-módulos, las sumas directas, los submódulos. Recordemos las definiciones de los conceptos anteriores.

Si M_1 y M_2 son KG-módulos, un homomorfismo $h: M_1 \to M_2$ es una aplicación lineal h tal que si $\alpha \in KG$ y $m \in M$ $h(\alpha m) = \alpha h(m)$. Si h es biyectiva, llamaremos a h un isomorfismo. Dos KG-módulos se llamarán isomorfos si existe un isomorfismo entre ellos.

Un subconjunto N de M se llama KG-submódulo si N es un K-subespacio vectorial de M y si para toda $\alpha \in KG$ y $n \in N$, $\alpha n \in N$.

Dados dos KG-módulos M_1 y M_2 podemos formar $M_1 \oplus M_2$ como sigue:

$$M_1 \oplus M_2 = \{(m,n) \mid m \in M_1, n \in M_2\}$$

$$(m,n) + (m',n') = (m + m', n + n')$$

Si $\alpha \in KG$, $\alpha(m,n) = (\alpha m, \alpha n)$

De importancia central en las consideraciones de Noether es el teorema de Maschke:

Teorema. Supongamos que la característica del campo K no divida al orden del grupo G. Entonces si N es un submódulo de M, existe otro submódulo N' de M tal que M es isomorfo a $N \oplus N'$.

Como consecuencia del resultado anterior se obtiene que si M es de dimensión finita sobre K, M es isomorfo a una suma $N_1 \oplus \ldots \oplus N_t$ en donde cada N_i ya no contiene submódulos distintos del 0 ni de N_i mismo. Tales módulos se llaman irreducibles.

En particular KG es isomorfo como KG-módulo a $U_1 \oplus \ldots \oplus U_\ell$ en donde cada U_i es un KG-módulo irreducible.

Obsérvese ahora que si $f: U_i \to U_j$ es un KG-morfismo entre módulos irreducibles, f es isomorfismo o es cero. En efecto $f(U_i)$, la imagen de U_i es (0) ó U_j. Si $f(U_i) = 0$ entonces $f = 0$ y tenemos probada nuestra afirmación, en caso contrario $f(U_i) = U_j$. El núcleo de f, $\text{Ker}f = [m \mid f(m) = o]$, es un KG-submódulo de U_i, como $f \neq 0$ $\text{Ker}f \neq U_i$, por tanto $\text{Ker}f = 0$ y en consecuencia f es inyectiva, como $f(U_i) = U_j$, f es suprayectiva, por tanto f es un isomorfismo.

Coleccionando a aquellas U_i que son isomorfas entre sí se tiene

KG es isomorfo como KG-módulo a
$B_1 \oplus \ldots \oplus B_t$

en donde cada $B_i = U_i \oplus \ldots \oplus U_i$ n(i)-veces y el único morfismo entre U_i y U_j si $i \neq j$ es el morfismo cero.

De aquí Noether concluye que KG es isomorfo como anillo al producto de anillos $M_{n_i}(D_i)$ i = 1,..., t, en donde D_i es el conjunto de KG-morfismos de U_i en U_i. Por la explicación dada arriba cada elemento $f \neq 0$ de D_i tiene un inverso, entonces D_i es un anillo con división y $M_{n_i}(D_i)$ denota al conjunto de matrices $n_i \times n_i$ con coeficientes en D_i.

Ahora bien, si $K = \mathbb{C}$, cada $D_i = \mathbb{C}$ y $\mathbb{C}G$ es isomorfo como anillo al producto $M_{n_1}(\mathbb{C}) \times \ldots \times M_{n_t}(\mathbb{C})$. Se puede ver que para cada i, n_i = dimensión sobre K de U_i y cada U_i aparece en $\mathbb{C}G$ exactamente n_i-veces. Esto se prueba simplemente examinando el anillo $M_{n_i}(\mathbb{C})$ y sus submódulos mínimos. Esto da uno de los previos resultados de Frobenius. De hecho examinando la descomposición anterior de $\mathbb{C}G$ uno puede obtener todos sus resultados y la correspondiente generalización para campos cuya característica no divida al orden del grupo.

Relaciones con el trabajo de Frobenius

Como vimos antes KG como KG-módulo se puede descomponer en suma de KG-módulos irreducibles:

$$KG = U_1 \oplus \ldots \oplus U_1 \oplus \ldots \oplus U_t \oplus \ldots \oplus U_t$$

en donde cada U_i aparece n_i veces. Sea como antes $G = \{g_1 = e, g_2, \ldots, g_n\}$. Los elementos $g_1^{-1} = e, g_2^{-1}, \ldots, g_n^{-1}$ forman una K-base para KG. Sea o(g) la matriz de la multiplicación por g asociada a la base anterior.

Escojamos para cada copia U_i en KG una K-base, en esta base la multiplicación por g tiene por matriz:

$$\tau(g) = \begin{pmatrix} T_1(g) & & & O \\ & \ddots & & \\ & & T_1(g) & \\ & & & \ddots \\ & & & & T_t(g) \\ & & & & & \ddots \\ O & & & & & & T_t(g) \end{pmatrix}$$

10 elementos

en donde cada $T_i(g)$ es la representación asociada de U_i.

Sean ahora $x_1 = x_{g_1}, \ldots, x_n = x_{g_n}$ indeterminadas. Es fácil verificar las siguientes igualdades:

$D(x_1, \ldots, x_n) = \det(x_{g_i g_j^{-1}}) = \det(\sigma(g_i)x_1 + \ldots + \sigma(g_n)x_n)$

Por otra parte existe una matriz no singular S tal que

$$S\sigma(g)S^{-1} = \tau(g) = \begin{pmatrix} T_1(g) & & & O \\ & \ddots & & \\ & & T_1(g) & \\ & & & \ddots \\ & & & & T_t(g) \\ & & & & & \ddots \\ O & & & & & & T_t(g) \end{pmatrix}$$

Por tanto

$$D(x_1, \ldots, x_n) = \det(\sigma(g_1)x_1 + \ldots + \sigma(g_n)x_n) =$$
$$= \det(S(\sigma(g_1)x_1 + \ldots + \sigma(g_n)x_n)S^{-1}) =$$
$$= \det(S\sigma(g_1)S^{-1}x_1 + \ldots + S\sigma(g_n)S^{-1}x_n) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} T_1(g_1)x_1 + \ldots + T_1(g_n)x_n & & \\ & \ddots & \\ & T_1(g_1)x_1 + \ldots + T_1(g_n)x_n & \\ & & \ddots \\ & & T_t(g_1)x_1 + \ldots + T_t(g_n)x_n \\ & & & \ddots \\ & & & T_t(g_1)x_1 + \ldots + T_t(g_n)x_n \end{pmatrix}$$

$$= \prod_{i=1}^{t} \det(T_i(g_1)x_1 + \ldots + T_i(g_n)x_n)^{n_i}$$

Cada uno de los factores $T_i(g_1)x_1 + \ldots + T_i(g_n)x_n$ es irreducible y corresponde a la representación T_i y entonces al carácter de ésta.

Si $h_1, \ldots, h_s$ son representantes de las clases conjugadas y ponemos $Z_i = Z_{h_i}$ y hacemos la sustitución de las x_i por las Z_i como en 4 se obtiene para cada h_i, si C_i representa el conjunto de elementos conjugados:

$$\Phi_i(x_1, \ldots, x_n) = \det(T_i(g_1)x_1 + \ldots + T_i(g_n)x_n)$$

$$\Phi_i^*(z_1, \ldots, z_s) = \det(\sum_{i=1}^{s} (\sum_{y \in C_i} T_i(y))z_i)$$

No es difícil ver que $\sum_{y \in C_i} T_i(y) = c_i I$ con I matriz identidad $\therefore d_i C_i = |C_i| \mathrm{tr} T_i(h_i)$

$$\therefore C_i = \frac{|C_i|}{n_i} \mathrm{tr} T_i(h) \text{ con } |C_i| = \text{cardinalidad de } C_i$$

$$\therefore \Phi_i^*(z_1, \ldots, z_s) = (\sum_{i=1}^{s} \frac{|C_i|}{n_i} \mathrm{tr} T_i(h) z_i)$$

por tanto las $r^{(i)}(h)$ de Frobenius son iguales a $\frac{|C_i|}{n_i} \mathrm{tr} T_i(h)$.

Desarrollos posteriores.

La teoría anterior permitió a E. Noether construir la teoría de representaciones a partir de estructuras algebraicas asociadas a la del grupo G, esto es KG y los anillos $M_{n_i}(D_i)$. En particular se obtuvo una teoría de carácteres de G sobre campos arbitrarios. En el caso general surge pues la necesidad de estudiar los anillos con división D_i.

En un trabajo posterior [1] E. Noether y R. Brauer, entonces un joven "Privatdozen" en Königsberg, estudiaron los anillos D_i. Entre otras cosas observaron que el centro de D_i, esto es la colección de elemento de D_i que conmutan con todos los elementos de D_i, se obtiene adjuntándole a K todos los valores del carácter asociado x_i. Estas consideraciones llevaron después a R. Brauer a estudiar la colección de anillos con división que tienen como centro un campo dado. Este concepto ha sido muy importante en el estudio de las propiedades aritméticas de campos.

Con posterioridad, desarrollando ideas de Noether, Frobenius y Schur, Brauer desarrolló una extensa teoría de carácteres modulares de grupos cuya influencia fue decisiva en la reciente clasificación de los grupos simples.

Finalmente quisiera mencionar que la importancia de los métodos introducidos por Emmy Noether rebasan el marco de los problemas particulares que ella trató. Estos métodos que primero presentó en sus conferencias en la Universidad de Gotinga fueron posteriormente redactados por B. L. van der Waerden [4] y [5]. Un poco después van der Waerden publica su famoso texto *Moderne algebre*, el libro más influyente en álgebra moderna por mucho tiempo, presentando las ideas de Noether en los capítulos 16 y 17 (ver [6]).

Referencias

[1] Brauer R. y Noether E. Über minimale Zerfällungskörper irreduzibler Darstellungen, Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wiss. (1927), 221-228.

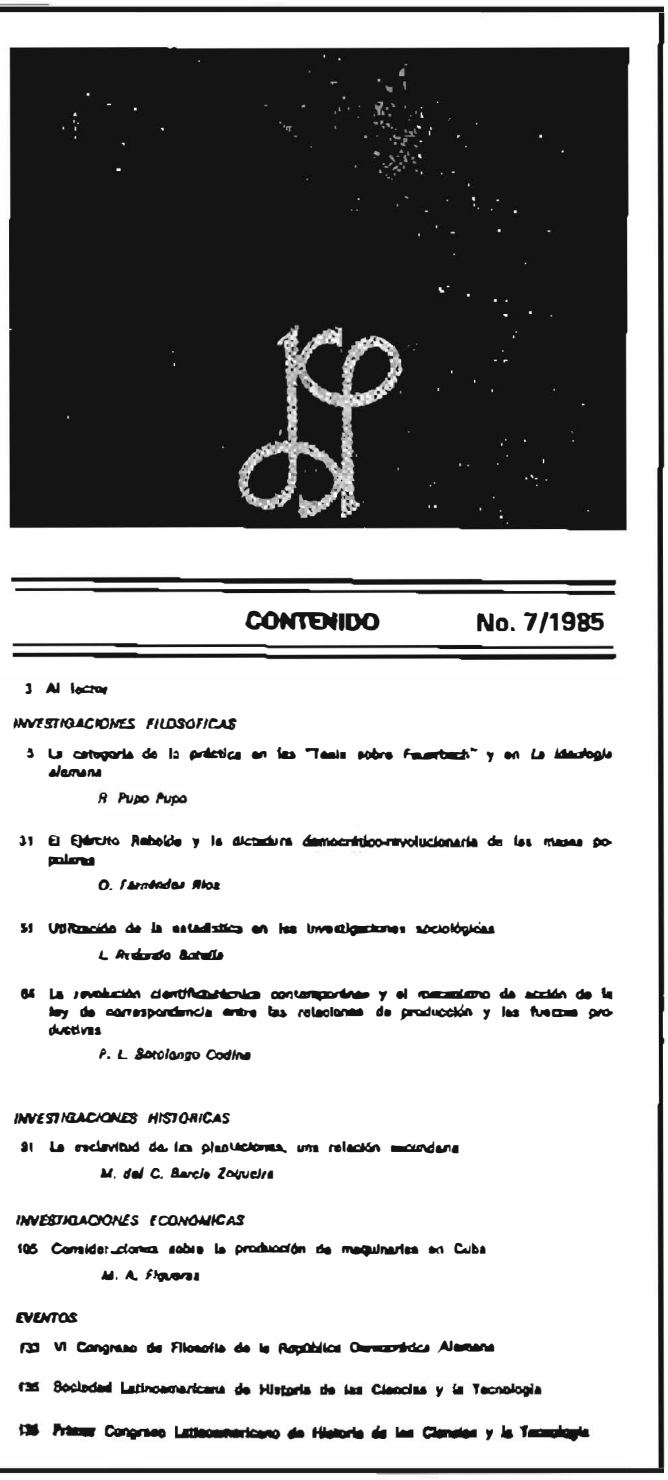
[2] Hawkins, T. *The original of the theoru of group characters.* Archive for History of Exact Sciences 7, 142-170.

[3] Hawkins, T. *New light on Frobenius' creation of the theory of group characters.* Archive for History of Exact Sciences 12, 217-243.

[4] Noether E. Hyperkomplexe Grössen und Darstellungs theorie, in arithmetischer Auffassung, Atti Congreso Bologna 2 (1928) 71-73.

[5] Noether E. Hyperkomplexe Grössen und Darstellungs Theorie, Math. Zeitschr. 30 (1929), 641-692.

[6] Van der Waerden. *Moderne Algebre.*



CONTENIDO **No. 7/1985**

3 Al lector

INVESTIGACIONES FILOSOFICAS

5 La categoría de la práctica en las "Tesis sobre Feuerbach" y en *La ideología alemana*
R. Pupo Pupo

31 El Ejército Rebelde y la dictadura democrático-revolucionaria de las masas populares
O. Fernández Ríos

51 Utilización de la estadística en las investigaciones sociológicas
L. Prádanos Bataille

64 La revolución científico-técnica contemporánea y el mecanismo de acción de la ley de correspondencia entre las relaciones de producción y las fuerzas productivas
P. L. Satolongo Codina

INVESTIGACIONES HISTORICAS

81 La esclavitud de las plantaciones, una relación secundaria
M. del C. García Zequeira

INVESTIGACIONES ECONOMICAS

105 Consideraciones sobre la producción de maquinarias en Cuba
M. A. Figueras

EVENTOS

133 VI Congreso de Filosofía de la República Democrática Alemana

135 Sociedad Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología

138 Primer Congreso Latinoamericano de Historia de las Ciencias y la Tecnología